Charaktertheorie

Vorlesung im Wintersemester 2013/14 und Sommersemester 2018

Benjamin Sambale

Version: 28. Juli 2025

	;	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	
		244823040	21504	7680	1080	504	384	128	96	60	24	24	42	42	16	20	11	12	12	14	14	15	15	21	21	23	23	
	p power		A	A	A	A	A	A	B	A	AA	BB	A	A	B	AB	A	AA	BC	AA	BA	AA	AA	BB	AB	A	A	
	p' part		A	A	A	A	A	A	A	A	AA	BB	A	A	A	AB	A	AA	BC	AA	BA	AA	AA	AB	BB	A	A	
	ind	1A	2A	2B	3A	3B	4A	4B	4C	5A	6A	6B	7A	B**	8A	10A	11A	12A	12B	14A	B**	15A	B**	21A	B**	23A	B**	
χ_1	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	χ_1
χ_2	+	23	7	-1	5	-1	-1	3	-1	3	1	-1	2	2	1	-1	1	-1	-1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	χ_2
χ_3	o	45	-3	5	0	3	-3	1	1	0	0	-1	b7	**	-1	0	1	0	1	-b7	**	0	0	b7	**	-1	-1	χ_3
χ_4	o	45	-3	5	0	3	-3	1	1	0	0	-1	**	b7	-1	0	1	0	1	**	-b7	0	0	**	b7	-1	-1	χ_4
χ_5	o	231	7	-9	-3	0	-1	-1	3	1	1	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0	0	b15	**	0	0	1	1	χ_5
χ_6	o	231	7	-9	-3	0	-1	-1	3	1	1	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0	0	**	b15	0	0	1	1	χ_6
χ_7	+	252	28	12	9	0	4	4	0	2	1	0	0	0	0	2	-1	1	0	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	χ_7
χ_8	+	253	13	-11	10	1	-3	1	1	3	-2	1	1	1	-1	-1	0	0	1	-1	-1	0	0	1	1	0	0	χ_8
χ_9	+	483	35	3	6	0	3	3	3	-2	2	0	0	0	-1	-2	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	χ_9
χ_{10}	o	770	-14	10	5	-7	2	-2	-2	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	b23	**	χ_{10}
χ_{11}	o	770	-14	10	5	-7	2	-2	-2	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	**	b23	χ_{11}
χ_{12}	o	990	-18	-10	0	3	6	2	-2	0	0	-1	b7	**	0	0	0	0	1	b7	**	0	0	b7	**	1	1	χ_{12}
χ_{13}	o	990	-18	-10	0	3	6	2	-2	0	0	-1	**	b7	0	0	0	0	1	**	b7	0	0	**	b7	1	1	χ_{13}
χ_{14}	+	1035	27	35	0	6	3	-1	3	0	0	2	-1	-1	1	0	1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	χ_{14}
χ_{15}	o	1035	-21	-5	0	-3	3	3	-1	0	0	1	2b7	**	-1	0	1	0	-1	0	0	0	0	-b7	**	0	0	χ_{15}
χ_{16}	o	1035	-21	-5	0	-3	3	3	-1	0	0	1	**	2b7	-1	0	1	0	-1	0	0	0	0	**	-b7	0	0	χ_{16}
χ_{17}	+	1265	49	-15	5	8	-7	1	-3	0	1	0	-2	-2	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	χ_{17}
χ_{18}	+	1771	-21	11	16	7	3	-5	-1	1	0	-1	0	0	-1	1	0	0	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	χ_{18}
χ_{19}	+	2024	8	24	-1	8	8	0	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	0	-1	0	1	1	-1	-1	1	1	0	0	χ_{19}
χ_{20}	+	2277	21	-19	0	6	-3	1	-3	-3	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	χ_{20}
χ_{21}	+	3312	48	16	0	-6	0	0	0	-3	0	-2	1	1	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	1	0	0	χ_{21}
χ_{22}	+	3520	64	0	10	-8	0	0	0	0	-2	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	1	1	χ_{22}
χ_{23}	+	5313	49	9	-15	0	1	-3	-3	3	1	0	0	0	-1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	χ_{23}
χ_{24}	+	5544	-56	24	9	0	-8	0	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	1	1	χ_{24}
χ_{25}	+	5796	-28	36	-9	0	-4	4	0	1	-1	0	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	χ_{25}
χ_{26}	+	10395	-21	-45	0	0	3	-1	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	χ_{26}

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skript basiert auf Vorlesungen im Wintersemester 2013/14 und im Sommersemester 2018 an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena. Es handelte sich um $3+1$ Vorlesungen für den Masterstudiengang der Mathematik. Mein Ziel war es möglichst schnell und elementar, die Hauptsätze der Charaktertheorie endlicher Gruppen zu beweisen. Von den Hörern wurden lediglich Vorkenntnisse der Algebra 1 vorausgesetzt (elementare Gruppentheorie und etwas Galoistheorie). Ich habe konsequent auf die Begriffe „Modul“ und „Gruppenalgebra“ verzichtet (üblicherweise Bestandteile einer Algebra 2 Vorlesung). Ich bedanke mich bei René Reichenbach und Sebastian Uschmann für zahlreiche Fehlerhinweise und Verbesserungsvorschläge.

Folgende Quellen liegen dem Skript zu Grunde (in absteigender Priorität):

- Külshammer, Skript zur Darstellungstheorie, `http://www.minet.uni-jena.de/algebra/skripten/dt/dt-2010/dt.pdf`.
- Isaacs, *Character theory of finite groups*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006
- Huppert, *Character theory of finite groups*, Expositions in Mathematics, Vol. 25, Walter de Gruyter GmbH & Co., Berlin, 1998

- Berkovich und Zhmud, *Characters of finite groups. Part 1*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 172, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- Huppert, *Endliche Gruppen I*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134, Springer-Verlag, Berlin, 1967
- Isaacs, *Finite group theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 92, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008
- Berkovich, *Groups of prime power order 1*, Expositions in Mathematics, Vol. 46, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008
- Tao, *Hilbert's fifth problem and related topics*, http://terrytao.wordpress.com/2011/08/27/254a-notes-0-hilberts-fifth-problem-and-related-topics
- Grove, *Groups and characters*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons Inc., New York, 1997
- Fulton und Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991

1 Darstellungen und Charaktere

Stets sei G eine endliche Gruppe.

Definition 1.1. Sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum. Eine *Darstellung* von G ist ein Homomorphismus $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$. Der *Grad* der Darstellung ist $n := \dim V$. Durch Wahl einer Basis von V erhält man eine entsprechende *Matrixdarstellung* $\Delta' : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Beispiel 1.2.

(i) Die *triviale* (Matrix-)Darstellung $1_G : G \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ ist gegeben durch $g \mapsto 1$ für $g \in G$.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $\mathrm{sgn} : S_n \to \mathbb{C}^\times$, $g \mapsto \mathrm{sgn}(g)$ eine Darstellung vom Grad 1.

(iii) Für zwei Darstellungen $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ und $\Gamma : G \to \mathrm{GL}(W)$ ist auch $\Delta \oplus \Gamma : G \to \mathrm{GL}(V \times W)$ eine Darstellung. Dabei ist $((\Delta \oplus \Gamma)(g))(v, w) := ((\Delta(g))(v), (\Gamma(g))(w))$ für $g \in G$, $v \in V$ und $w \in W$.

(iv) Ist $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung und $H \leq G$, so erhält man durch Einschränkung eine Darstellung $\Delta_H : H \to \mathrm{GL}(V)$, $h \mapsto \Delta(h)$.

(v) Ist $N \trianglelefteq G$ und $\Delta : G/N \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung, so erhält man durch *Inflation* eine Darstellung $G \to \mathrm{GL}(V)$, $g \mapsto \Delta(gN)$ auf G. Diese werden wir oft auch mit Δ bezeichnen.

(vi) Ist $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung und $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq \mathrm{Ker}(\Delta)$, so erhält man durch *Deflation* eine wohldefinierte Darstellung $\widehat{\Delta} : G/N \to \mathrm{GL}(V)$, $gN \mapsto \Delta(g)$. Insbesondere ist $\widehat{\Delta} : G/\mathrm{Ker}(\Delta) \to \mathrm{GL}(V)$ eine *treue* Darstellung, d. h. $\widehat{\Delta}$ ist injektiv.

(vii) Inflation und Deflation sind offenbar zueinander invers.

Definition 1.3. Zwei Darstellungen $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ und $\Gamma : G \to \mathrm{GL}(W)$ heißen *ähnlich*, falls ein Isomorphismus $f : V \to W$ mit $f \circ \Delta(g) = \Gamma(g) \circ f$ für alle $g \in G$ existiert. Gegebenenfalls ist also das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Delta(g)"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "\Gamma(g)"] & W \end{tikzcd}$$

Entsprechend sind zwei Matrixdarstellungen $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ und $\Gamma : G \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ ähnlich, falls $n = m$ ist und ein $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ existiert mit $A\Delta(g) = \Gamma(g)A$ für alle $g \in G$.

Bemerkung 1.4.

(i) Ähnliche Darstellungen haben den gleichen Grad.

(ii) Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation.

(iii) Man interessiert sich in der Regel nur für Darstellungen bis auf Ähnlichkeit (so wie für Gruppen bis auf Isomorphie).

(iv) In der linearen Algebra zeigt man, dass zwei quadratische Matrizen A, B genau dann die gleiche Abbildung beschreiben, wenn es eine invertierbare Matrix T mit $AT = TB$ gibt. Somit sind zwei Matrixdarstellungen Γ_1 und Γ_2, die einer festen Darstellung Δ von G entsprechen, stets ähnlich.

(v) Die Ähnlichkeitsklassen von Darstellungen und Matrixdarstellungen entsprechen sich offenbar. Wir werden daher im Folgenden Darstellungen oft mit ihren entsprechenden Matrixdarstellungen identifizieren.

Definition 1.5. Sei $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung. Ein Untervektorraum $U \leq V$ heißt Δ-*invariant*, falls $(\Delta(g))(u) \in U$ für alle $g \in G$ und $u \in U$ gilt. Gegebenenfalls ist $\Delta' : G \to \mathrm{GL}(U)$, $g \mapsto \Delta(g)_{|U}$ auch eine Darstellung. Sind 0 und V die einzigen Δ-invarianten Untervektorräume, so ist Δ *irreduzibel*. Anderenfalls ist Δ *reduzibel*.

Beispiel 1.6.

(i) Darstellungen vom Grad 1 sind offensichtlich irreduzibel.

(ii) Inflation und Deflation irreduzibler Darstellungen sind wieder irreduzibel (die Bilder ändern sich nicht).

Satz 1.7 (MASCHKE). *Sei $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung und $U \leq V$ Δ-invariant. Dann besitzt U ein Δ-invariantes Komplement $W \leq V$, d. h. $V = U \oplus W$.*

Beweis. Wir wählen zunächst einen beliebigen Untervektorraum X von V mit $V = U \oplus X$ (lineare Algebra) und bezeichnen mit $h : V \to V$ die entsprechende Projektion auf U. Dann setzen wir

$$g := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \Delta(x^{-1}) \circ h \circ \Delta(x)$$

und $W := \mathrm{Ker}(g)$. Für $u \in U$ ist also

$$g(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}(\Delta(x^{-1}) \circ h \circ \Delta(x))(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\underbrace{(\Delta(x^{-1}) \circ \Delta(x))}_{=\Delta(x^{-1}x)=\Delta(1)=\mathrm{id}_V}(u) = u.$$

Insbesondere ist $U \cap W = 0$. Für $v \in V$ ist $g(v) \in U$, also

$$g(v - g(v)) = g(v) - g(g(v)) = g(v) - g(v) = 0,$$

d. h. $v - g(v) \in W$ und $v = g(v) + (v - g(v)) \in U + W$. Folglich ist $V = U \oplus W$. Für $w \in W$ und $y \in G$ ist

$$\begin{aligned}(g \circ \Delta(y))(w) &= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\Delta(x^{-1}) \circ h \circ \Delta(xy)\right)(w)\\ &= \left(\Delta(y) \circ \underbrace{\left(\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\Delta(y^{-1}x^{-1}) \circ h \circ \Delta(xy)\right)}_{=g}\right)(w)\\ &= (\Delta(y) \circ g)(w) = (\Delta(y))(0) = 0,\end{aligned}$$

also $(\Delta(y))(w) \in \mathrm{Ker}(g) = W$. Folglich ist W Δ-invariant. □

Bemerkung 1.8. Sei Δ eine Darstellung auf V, und sei $V = U \oplus W$ eine Δ-invariante Zerlegung. Dies liefert Teildarstellungen $\Gamma_U : G \to \mathrm{GL}(U)$, $g \mapsto \Delta(g)_{|U}$ und $\Gamma_W : G \to \mathrm{GL}(W)$, $g \mapsto \Delta(g)_{|W}$. Durch Wahl einer geeigneten Basis von V hat Δ dann die Form

$$\Delta(g) = \begin{pmatrix}\Gamma_U(g) & 0\\ 0 & \Gamma_W(g)\end{pmatrix}$$

für alle $g \in G$. Somit ist $\Delta = \Gamma_U \oplus \Gamma_W$. Jede Darstellung lässt sich also als direkte Summe irreduzibler Darstellungen schreiben.

Lemma 1.9 (Schurs Lemma)**.** *Seien $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\Gamma : G \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ irreduzible Matrixdarstellungen und $0 \neq A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mit $A\Gamma(g) = \Delta(g)A$ für alle $g \in G$. Dann ist $n = m$ und A ist invertierbar (insbesondere sind Δ und Γ ähnlich). Im Fall $\Delta = \Gamma$ gilt $A = \lambda 1_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.*

Beweis. Für $g \in G$ und $v \in \mathrm{Ker}(A)$ ist

$$(A\Delta(g))v = (\Gamma(g)A)v = 0,$$

also $(\Delta(g))v \in \mathrm{Ker}(A)$. Daher ist $\mathrm{Ker}(A)$ ein Δ-invarianter Untervektorraum von $\mathbb{C}^m$. Analog ist $\mathrm{Bild}(A)$ ein Γ-invarianter Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$. Also ist $\mathrm{Ker}(A) = 0$ und $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{C}^n$ wegen der Irreduzibilität von Δ und Γ. Folglich ist A invertierbar und $n = m$. Sei nun $\Delta = \Gamma$. Sei λ ein Eigenwert von A. Dann gilt auch $(A - \lambda 1_n)\Gamma(g) = \Delta(g)(A - \lambda 1_n)$ für alle $g \in G$. Da $A - \lambda 1_n$ nicht invertierbar ist, folgt $A - \lambda 1_n = 0$ aus dem ersten Teil des Beweises. □

Satz 1.10. *Jede irreduzible Darstellung einer abelschen Gruppe hat Grad* 1.

Beweis. Sei G abelsch und $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eine irreduzible Matrixdarstellung von G. Sei $g \in G$ fest. Für alle $h \in G$ gilt dann $\Delta(g)\Delta(h) = \Delta(gh) = \Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g)$. Nach Schurs Lemma ist also $\Delta(g) = \lambda_g 1_n$ für ein $\lambda_g \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $\mathbb{C}(1, 0, \ldots, 0)$ ein Δ-invarianter Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$. Da Δ irreduzibel ist, folgt $n = 1$. □

Definition 1.11. Sei $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ eine Matrixdarstellung. Die Abbildung $\chi : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \mathrm{Spur}\,\Delta(g)$ heißt *Charakter* von Δ (und von G). Dabei ist $\chi(1) = \mathrm{Spur}\,\Delta(1) = \mathrm{Spur}\,1_n = n$ der *Grad* von χ (und von Δ). Ist Δ irreduzibel (treu, …), so bezeichnet man auch χ als *irreduzibel* (*treu*, …). Die Menge der irreduziblen Charaktere von G bezeichnen wir mit $\mathrm{Irr}(G)$.

Lemma 1.12. *Ähnliche Matrixdarstellungen haben den gleichen Charakter.*

Beweis. Seien $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ und $\Gamma : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ähnliche Matrixdarstellungen. Dann existiert ein $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ mit $\Delta(g)A = A\Gamma(g)$ für alle $g \in G$. Aus der linearen Algebra weiß man, dass für quadratische Matrizen M_1, M_2 der gleichen Dimension gilt: $\mathrm{Spur}(M_1M_2) = \mathrm{Spur}(M_2M_1)$. Somit ist $\mathrm{Spur}\,\Delta(g) = \mathrm{Spur}((A\Gamma(g))A^{-1}) = \mathrm{Spur}(A^{-1}(A\Gamma(g))) = \mathrm{Spur}\,\Gamma(g)$ für alle $g \in G$. □

Bemerkung 1.13.

(i) Ist $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung, so kann man Δ einen Charakter zuordnen, indem man eine entsprechende Matrixdarstellung wählt. Wegen Lemma 1.12 kommt es dabei nicht auf die Wahl der Basis von V an.

(ii) Charaktere sind die „Schatten“ von Darstellungen, d. h. man verliert einerseits Information, indem man die n^2 Einträge einer Matrix durch einen einzigen Wert ersetzt, aber andererseits bleibt genug Information, um Eigenschaften der Gruppe abzulesen.

(iii) Offenbar stimmen Darstellungen vom Grad 1 mit ihrem Charakter überein. Man nennt diese Charaktere *linear*. Insbesondere gibt es den *trivialen* Charakter $1_G : G \to \mathbb{C}$ mit $1_G(g) = 1$ für $g \in G$.

(iv) Sind Δ und Γ Darstellungen mit Charakter χ_Δ bzw. χ_Γ, so hat $\Delta \oplus \Gamma$ den Charakter $\chi_\Delta + \chi_\Gamma$. Summen von Charakteren sind also wieder Charaktere.

(v) Für jede Darstellung $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ ist $\det\Delta : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \det\Delta(g)$ ein Charakter vom Grad 1.

Definition 1.14.

(i) Sei $g \in G$. Dann nennt man $C := \{hgh^{-1} : h \in G\}$ die *Konjugationsklasse* von g. Offenbar ist $\{1\}$ eine Konjugationsklasse von G. Die Menge der Konjugationsklassen von G ist $\mathrm{Cl}(G)$. Ist $h \in C$, so sind g und h *konjugiert*. Sei $\mathrm{C}_G(g) := \{x \in G : xg = gx\} \leq G$ der *Zentralisator* von g in G. In der Algebra 1 zeigt man $|C| = |G : \mathrm{C}_G(g)|$.

(ii) Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *Klassenfunktion*, falls $f(g) = f(hgh^{-1})$ für alle $g, h \in G$ gilt. Klassenfunktionen sind also konstant auf Konjugationsklassen.

Lemma 1.15.

(i) Die Charaktere einer Gruppe G sind Klassenfunktionen.

(ii) Die Menge $\mathrm{CF}(G)$ der Klassenfunktionen bildet einen $\mathbb{C}$-Vektorraum durch $(\alpha+\beta)(g) := \alpha(g) + \beta(g)$ und $(a \cdot \alpha)(g) = a\alpha(g)$ für $\alpha, \beta \in \mathrm{CF}(G)$, $a \in \mathbb{C}$ und $g \in G$. Dabei ist $\dim \mathrm{CF}(G) = |\mathrm{Cl}(G)|$.

Beweis.

(i) Sei $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung mit Charakter χ. Für $g, h \in G$ ist

$$\chi(hgh^{-1}) = \mathrm{Spur}\,\Delta(hgh^{-1}) = \mathrm{Spur}(\Delta(h)\Delta(g)\Delta(h)^{-1}) = \mathrm{Spur}\,\Delta(g) = \chi(g).$$

(ii) Trivial. $\square$

Definition 1.16. Offenbar definiert

$$(\chi,\psi)_G := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\psi(g)} \qquad (\chi,\psi\in \mathrm{CF}(G)).$$

ein Skalarprodukt des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathrm{CF}(G)$. Auf diese Weise wird $\mathrm{CF}(G)$ zu einem Hilbertraum.

Bemerkung 1.17. Für Charaktere χ,ψ von G ist nach Aufgabe 5 auch

$$(\chi,\psi)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\psi(g^{-1}).$$

Lemma 1.18 (Schur-Relationen)**.** *Seien $\Delta : G\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\Gamma : G\to \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ irreduzible Matrixdarstellungen mit $\Delta(g) = (\lambda_{ij}(g))$ und $\Gamma(g) = (\theta_{ij}(g))$ für $g\in G$.*

(i) Sind Δ und Γ nicht ähnlich, so ist

$$\sum_{g\in G}\lambda_{ii}(g)\theta_{jj}(g^{-1}) = 0$$

für alle i,j.

(ii) Es ist

$$\sum_{g\in G}\lambda_{ii}(g)\lambda_{jj}(g^{-1}) = \frac{|G|}{n}\delta_{ij}.$$

Beweis. Sei $E_{ij}\in\mathbb{C}^{n\times m}$ die Matrix mit einer 1 an Position (i,j) und sonst nur Nullen. Wir setzen

$$F_{ij} := \sum_{g\in G}\Delta(g)E_{ij}\Gamma(g^{-1}).$$

Für $h\in G$ ist dann $\Delta(h)F_{ij}\Gamma(h^{-1}) = F_{ij}$, d. h. $\Delta(h)F_{ij} = F_{ij}\Gamma(h)$. Sind Δ und Γ nicht ähnlich, so folgt $F_{ij} = 0$ aus Schurs Lemma. Insbesondere ist F_{ij} an der Position (i,j) gleich 0, d. h. (i) gilt.

Sei nun $\Delta = \Gamma$. Nach Schur ist $F_{ij} = \rho_{ij}\cdot 1_n$ für ein $\rho_{ij}\in\mathbb{C}$. Für den Eintrag von F_{ij} an Position $(1,1)$ gilt dann

$$\rho_{ij} = \sum_{g\in G}\lambda_{1i}(g)\lambda_{j1}(g^{-1}) = \sum_{h\in G}\lambda_{1i}(h^{-1})\lambda_{j1}(h) = \sum_{h\in G}\lambda_{j1}(h)\lambda_{1i}(h^{-1}) = \rho_{11}\delta_{ij}.$$

Mit $\rho := \rho_{11}\ (=\rho_{ii})$ gilt dann

$$n\rho = \sum_{j=1}^{n}\sum_{g\in G}\lambda_{ij}(g)\lambda_{ji}(g^{-1}) = \sum_{g\in G}1 = |G|$$

wegen $\Delta(g)\Delta(g^{-1}) = 1_n$ für $g\in G$. Nun ergibt sich (ii) durch den Eintrag von F_{ij} an Position (i,j). $\square$

Satz 1.19 (Erste Orthogonalitätsrelation)**.** *Für $\chi,\psi\in\mathrm{Irr}(G)$ gilt*

$$\boxed{(\chi,\psi)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\psi(g)} = \begin{cases}1 & \text{falls } \chi=\psi,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}}$$

Beweis. Seien Δ und Γ irreduzible Darstellungen von G mit Charakter χ bzw. ψ. Sei zunächst $\chi \neq \psi$. Nach Lemma 1.12 sind dann Δ und Γ nicht ähnlich. Wir schreiben $\Delta(g) = (\lambda_{ij}(g))$ und $\Gamma(g) = (\theta_{ij}(g))$ für $g \in G$. Dann ist $\chi(g) = \sum \lambda_{ii}(g)$ und $\psi(g) = \sum \theta_{ii}(g)$. Nach Lemma 1.18 ist also

$$(\chi, \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} \lambda_{ii}(g)\theta_{jj}(g^{-1}) = 0.$$

Analog gilt

$$(\chi, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} \lambda_{ii}(g)\lambda_{jj}(g^{-1}) = \frac{\chi(1)}{|G|} \frac{|G|}{\chi(1)} = 1. \qquad \square$$

Bemerkung 1.20. Aus Satz 1.19 folgt leicht, dass $\mathrm{Irr}(G)$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathrm{CF}(G)$ ist. Insbesondere ist $|\mathrm{Irr}(G)| \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{CF}(G) = |\mathrm{Cl}(G)| \leq |G| < \infty$.

Satz 1.21. *Zwei Darstellungen sind genau dann ähnlich, wenn sie den gleichen Charakter haben.*

Beweis. Eine Richtung ist Lemma 1.12. Seien nun Δ und Γ Darstellungen mit dem gleichen Charakter χ. Wir schreiben $\Delta = \bigoplus_{i=1}^n \Delta_i$ und $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^m \Gamma_i$ als Summen von irreduziblen Darstellungen. Dann zerlegt sich auch χ in

$$\chi = \sum_{i=1}^n \chi_{\Delta_i} = \sum_{i=1}^m \chi_{\Gamma_i}.$$

Nach Bemerkung 1.20 ist $n = m$ und $\chi_{\Delta_i} = \chi_{\Gamma_i}$ bei geeigneter Nummerierung. Aus Lemma 1.18 folgt nun leicht, dass Δ_i und Γ_i ähnlich sind. Sei also $A_i \in \mathrm{GL}(\chi_{\Delta_i}(1), \mathbb{C})$ mit $A_i\Delta_i(g) = \Gamma_i(g)A_i$ für alle $g \in G$. Für

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\chi(1), \mathbb{C})$$

gilt dann offenbar $A\Delta(g) = \Gamma(g)A$ für alle $g \in G$, d. h. Δ und Γ sind ähnlich. $\square$

Bemerkung 1.22.

(i) Sei ρ der reguläre Charakter von G. Nach Aufgabe 2 gilt

$$\rho(g) = \begin{cases} |G| & \text{falls } g = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ist daher

$$(\rho, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\overline{\chi(g)} = \chi(1).$$

Es folgt $\rho = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi$ und $\boxed{|G| = \rho(1) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2.}$

(ii) Seien $C, D, E \in \mathrm{Cl}(G)$, $e \in E$ und $g \in G$. Dann ist die Abbildung $(c, d) \mapsto (gcg^{-1}, gdg^{-1})$ eine Bijektion zwischen $\{(c, d) \in C \times D : cd = e\}$ und $\{(c, d) \in C \times D : cd = geg^{-1}\}$. Daher hängt der *Klassenmultiplikationskonstante*

$$c_{CDE} := |\{(c, d) \in C \times D : cd = e\}|$$

nicht von der Wahl von $e \in E$ ab.

Lemma 1.23. *Für eine irreduzible Darstellung Δ mit Charakter χ und $g \in C \in \mathrm{Cl}(G)$ gilt*

$$\sum_{x\in C} \Delta(x) = \omega_\Delta(C)\,\mathrm{id}$$

mit $\omega_\Delta(C) := \omega_\chi(C) := \frac{|C|}{\chi(1)}\chi(g)$.

Beweis. Sei $A := \sum_{x\in C}\Delta(x)$. Für $y \in G$ gilt $\Delta(y)A\Delta(y^{-1}) = \sum_{x\in C}\Delta(yxy^{-1}) = A$. Aus Schurs Lemma folgt $A = \omega_\Delta(C)\,\mathrm{id}$ für ein $\omega_\Delta(C) \in \mathbb{C}$. Weiter ist $\omega_\Delta(C)\chi(1) = \mathrm{Spur}\,A = \sum_{x\in C}\chi(x) = |C|\chi(g)$. □

Satz 1.24 (Zweite Orthogonalitätsrelation)**.** *Für $g, h \in G$ gilt*

$$\boxed{\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(g)\overline{\chi(h)} = \begin{cases} |\mathrm{C}_G(g)| & \text{falls } g \text{ und } h \text{ konjugiert sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}}$$

Beweis. Seien $C, D \in \mathrm{Cl}(G)$ mit $g \in C$ und $h^{-1} \in D$. Sei $\Delta\colon G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ eine irreduzible Matrixdarstellung mit Charakter χ. Nach Lemma 1.23 gilt

$$\begin{aligned}\omega_\chi(C)\omega_\chi(D)1_n &= \sum_{c\in C}\Delta(c)\sum_{d\in D}\Delta(d) = \sum_{c\in C}\sum_{d\in D}\Delta(cd) \overset{1.22}{=} \sum_{E\in\mathrm{Cl}(G)} c_{CDE}\sum_{e\in E}\Delta(e) \\ &= \sum_{E\in\mathrm{Cl}(G)} c_{CDE}\,\omega_\chi(E)1_n.\end{aligned}$$

Aus der Definition von ω_χ erhält man

$$\chi(g)\overline{\chi(h)} = \sum_{E\in\mathrm{Cl}(G)} \frac{c_{CDE}|E|}{|C||D|}\chi(1)\chi(e),$$

wobei jeweils $e \in E$ gewählt ist. Sei ρ der reguläre Charakter von G. Summieren über χ liefert

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(g)\overline{\chi(h)} = \sum_{E\in\mathrm{Cl}(G)} \frac{c_{CDE}|E|}{|C||D|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(1)\chi(e) \overset{1.22}{=} \sum_{E\in\mathrm{Cl}(G)}\frac{c_{CDE}|E|}{|C||D|}\rho(e) = \frac{c_{CD\{1\}}|G|}{|C||D|}.$$

Die Konjugationsklasse von h ist offenbar $D^{-1} = \{d^{-1} : d \in D\}$. Sind g und h nicht konjugiert, so ist also $C \cap D^{-1} = \varnothing$ und $c_{CD\{1\}} = 0$. Anderenfalls ist $c_{CD\{1\}} = |C| = |D|$ und die Behauptung folgt aus $\frac{|G|}{|C|} = |\mathrm{C}_G(g)|$. □

Satz 1.25. $\mathrm{Irr}(G)$ *ist eine Orthonormalbasis von* $\mathrm{CF}(G)$*. Insbesondere ist* $\boxed{k(G) := |\mathrm{Irr}(G)| = |\mathrm{Cl}(G)|.}$

Beweis. Wir wissen bereits, dass $\mathrm{Irr}(G)$ linear unabhängig ist (Bemerkung 1.20). Nach der zweiten Orthogonalitätsrelation ist für $g \in C \in \mathrm{Cl}(G)$ andererseits

$$\varphi_C := \frac{1}{|\mathrm{C}_G(g)|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(g^{-1})\chi$$

die charakteristische Funktion auf C (d. h. $\varphi_C(x)$ ist 1 falls $x \in C$ und sonst 0). Da die charakteristischen Funktionen eine Basis von $\mathrm{CF}(G)$ bilden, ist $\mathrm{Irr}(G)$ auch ein Erzeugendensystem. Die Orthonormalität folgt aus der ersten Orthogonalitätsrelation. □

Bemerkung 1.26.

(i) Jede Klassenfunktion $f \in \mathrm{CF}(G)$ lässt sich also eindeutig in der Form

$$f = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi$$

mit $a_\chi \in \mathbb{C}$ schreiben. Ist $a_\chi \in \mathbb{Z}$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, so ist f ein *virtueller Charakter* von G (oder *verallgemeinerter Charakter*). Gilt zusätzlich $a_\chi \geq 0$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $a_\psi > 0$ für mindestens ein $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$, so ist f ein Charakter nach Bemerkung 1.13(iv). Umgekehrt hat jeder Charakter von G die Form $\psi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi$ mit $a_\chi \in \mathbb{N}_0$. Ist $a_\chi = (\psi, \chi)_G > 0$, so nennt man χ einen *irreduziblen Bestandteil* von ψ mit *Vielfachheit* a_χ. Außerdem gilt $(\psi, \psi)_G = \sum a_\chi^2$. Insbesondere ist ψ genau dann irreduzibel, falls $(\psi, \psi)_G = 1$ gilt.

(ii) Im Allgemeinen kennt man keine kanonische Bijektion zwischen $\mathrm{Cl}(G)$ und $\mathrm{Irr}(G)$.

2 Charaktertafeln

Bemerkung 2.1. Sei $g_1, \ldots, g_k \in G$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von G, und sei $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$. Die $k \times k$-Matrix $C := (\chi_i(g_j))_{i,j}$ heißt *Charaktertafel* von G. Natürlich hängt C von der Reihenfolge der Elemente und Charaktere ab. In der Regel wählt man $g_1 = 1$, $\chi_1 = 1_G$ und $\chi_1(1) \leq \chi_2(1) \leq \ldots \leq \chi_k(1)$. In diesem Kapitel wollen wir C für einige Gruppen berechnen. Die erste Orthogonalitätsrelation lässt sich in der Form

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|\mathrm{C}_G(g_i)|} \chi_r(g_i) \overline{\chi_s(g_i)} = \delta_{rs}$$

schreiben. Dies betrifft also die Zeilen von C. Die zweite Orthogonalitätsrelation besagt, dass die Spalten von C paarweise orthogonal bzgl. des Standardskalarprodukts von $\mathbb{C}^k$ sind. Insbesondere ist C invertierbar.

Bemerkung 2.2. Seien G und H endliche Gruppen und $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ und $\Gamma : H \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ Matrixdarstellungen. Für $g \in G$ und $h \in H$ schreiben wir $\Delta(g) = (\alpha_{ij}(g))$ und $\Gamma(h) = (\beta_{ij}(h))$. Sei $f : \{1, \ldots, nm\} \to \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$, $i \mapsto (i_1, i_2)$ eine Bijektion. Für $(g, h) \in G \times H$ definieren wir eine Matrix $(\Delta \otimes \Gamma)(g, h) \in \mathbb{C}^{nm \times nm}$ durch

$$(\Delta \otimes \Gamma)(g, h) = (\alpha_{i_1 j_1}(g) \beta_{i_2 j_2}(h))_{i,j=1}^{nm} \qquad \text{(Kronecker-Produkt).}$$

Satz 2.3. *Die Abbildung $\Delta \otimes \Gamma : G \times H \to \mathrm{GL}(nm, \mathbb{C})$ ist eine Darstellung mit Grad nm. Für die entsprechenden Charaktere gilt $\chi_{\Delta \otimes \Gamma} = \chi_\Delta \chi_\Gamma$, wobei $(\chi_\Delta \chi_\Gamma)(g, h) = \chi_\Delta(g) \chi_\Gamma(h)$ für $g \in G$ und $h \in H$.*

Beweis. Für $(g_1,h_1),(g_2,h_2)\in G\times H$ gilt

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes\Gamma)(g_1g_2,h_1h_2)&=(\alpha_{i_1j_1}(g_1g_2)\beta_{i_2j_2}(h_1h_2))_{i,j}\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\alpha_{i_1k}(g_1)\alpha_{kj_1}(g_2)\beta_{i_2l}(h_1)\beta_{lj_2}(h_2)\right)_{i,j}\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\alpha_{i_1k}(g_1)\beta_{i_2l}(h_1)\alpha_{kj_1}(g_2)\beta_{lj_2}(h_2)\right)_{i,j}\\&=\left(\sum_{r=1}^{nm}\alpha_{i_1r_1}(g_1)\beta_{i_2r_2}(h_1)\alpha_{r_1j_1}(g_2)\beta_{r_2j_2}(h_2)\right)_{i,j}\\&=(\Delta\otimes\Gamma)(g_1,h_1)(\Delta\otimes\Gamma)(g_2,h_2).\end{aligned}$$

Insbesondere ist $(\Delta\otimes\Gamma)(g,h)(\Delta\otimes\Gamma)(g^{-1},h^{-1})=(\Delta\otimes\Gamma)(1,1)=(\alpha_{i_1j_1}(1)\beta_{i_2j_2}(1))_{i,j}=1_{nm}$ und $(\Delta\otimes\Gamma)(g,h)\in\mathrm{GL}(nm,\mathbb{C})$. Damit ist gezeigt, dass $\Delta\otimes\Gamma$ eine Darstellung ist. Für den Charakter gilt

$$\chi_{\Delta\otimes\Gamma}(g,h)=\sum_{i=1}^{nm}\alpha_{i_1i_1}(g)\beta_{i_2i_2}(h)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\alpha_{kk}(g)\beta_{ll}(h)=\chi_\Delta(g)\chi_\Gamma(h).$$ □

Bemerkung 2.4.

(i) Nach Satz 1.21 hängt die Ähnlichkeitsklasse von $\Delta\otimes\Gamma$ nicht von der Wahl der Bijektion f ab.

(ii) Im Fall $H=G$ erhält man eine Darstellung von G durch $g\mapsto(\Delta\otimes\Gamma)(g,g)$. Diese wird ebenfalls mit $\Delta\otimes\Gamma$ bezeichnet. Für Charaktere χ,ψ von G ist also auch das Produkt $\chi\psi$ mit $(\chi\psi)(g):=\chi(g)\psi(g)$ ein Charakter von G. Für $\chi,\psi\in\mathrm{Irr}(G)$ ist $\chi\psi$ nicht unbedingt irreduzibel.

Satz 2.5. *Für endliche Gruppen G,H ist* $\mathrm{Irr}(G\times H)=\{\chi\psi:\chi\in\mathrm{Irr}(G),\psi\in\mathrm{Irr}(H)\}$.

Beweis. Sei $\mathrm{Irr}(G)=\{\chi_1,\ldots,\chi_n\}$ und $\mathrm{Irr}(H)=\{\psi_1,\ldots,\psi_m\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}(\chi_i\psi_j,\chi_k\psi_l)_{G\times H}&=\frac{1}{|G\times H|}\sum_{g\in G}\sum_{h\in H}\chi_i(g)\psi_j(h)\overline{\chi_k(g)\psi_l(h)}\\&=\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_k(g)}\right)\left(\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\psi_j(h)\overline{\psi_l(h)}\right)=\delta_{ik}\delta_{jl}.\end{aligned}$$

Also sind die Charaktere $\chi_i\psi_j$ irreduzibel und paarweise verschieden. Wegen

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\chi_i\psi_j)(1)^2=\sum_{i=1}^{n}\chi_i(1)^2\sum_{j=1}^{m}\psi_j(1)^2=|G||H|=|G\times H|$$

hat man alle irreduziblen Charaktere von $G\times H$ gefunden. □

Bemerkung 2.6. Sei G zyklisch der Ordnung n (wir schreiben $G\cong C_n$). Nach Aufgabe 1 ist die Charaktertafel von G durch $(e^{\frac{2\pi ikl}{n}})_{k,l=0}^{n-1}$ gegeben ($i=\sqrt{-1}$). Aus der Algebra 1/2 weiß man, dass jede abelsche Gruppe G das direkte Produkt zyklischer Gruppen ist (für einen elementaren Beweis siehe Theorem 2.1.3 in Kurzweil-Stellmacher, „Theorie der endlichen Gruppen“). Mit Satz 2.5 lässt sich also leicht die Charaktertafel von G berechnen.

Beispiel 2.7. Sei $G := \{1, x, y, z\,(= xy)\} \cong C_2 \times C_2 = C_2^2$ die Kleinsche Vierergruppe mit $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_4\}$. Dann ist

C_2^2	1	x	y	z
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

die Charaktertafel von G.

Definition 2.8. Für $x, y \in G$ ist $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ der *Kommutator* von x und y. Wir setzen

$$G' := \langle [x, y] : x, y \in G \rangle$$

(die kleinste Untergruppe, die alle Kommutatoren enthält). Dann heißt G' *Kommutatorgruppe* von G.

Bemerkung 2.9. Für $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ und $x, y \in G$ ist offenbar $\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)] \in G'$. Insbesondere ist $G' \trianglelefteq G$ (wähle $\alpha \in \mathrm{Inn}(G)$). Für $xG', yG' \in G/G'$ ist

$$xG'yG' = xy \underbrace{[y^{-1}, x^{-1}]}_{\in G'} G' = yG'xG',$$

d. h. G/G' ist abelsch. Ist umgekehrt $N \trianglelefteq G$ mit G/N abelsch, so gilt $[x, y]N = xNyN(xN)^{-1}(yN)^{-1} = N$ für $x, y \in G$, d. h. $G' \subseteq N$.

Satz 2.10. *Die Charaktere von G vom Grad 1 sind gerade die Inflationen von $\mathrm{Irr}(G/G')$.*

Beweis. Sei χ ein Charakter von G vom Grad 1. Dann ist $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ ein Homomorphismus. Insbesondere ist $G/\operatorname{Ker}\chi$ als Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ abelsch, d. h. $G' \subseteq \operatorname{Ker}\chi$. Deflation liefert also ein $\psi \in \mathrm{Irr}(G/G')$ und χ ist die Inflation von ψ.

Umgekehrt hat die Inflation jedes $\chi \in \mathrm{Irr}(G/G')$ Grad 1 wegen Satz 1.10. $\square$

Beispiel 2.11. Sei $G = A_4$ die alternierende Gruppe vom Grad 4. Bekanntlich ist die Kleinsche Vierergruppe $V := \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle$ normal in G. Wegen $|G/V| = 3$ ist G/V abelsch und $G' \subseteq V$. Da G nicht abelsch ist, muss also $G' = V$ gelten. Für $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ gilt also o. B. d. A. $\chi_1(1) = \chi_2(1) = \chi_3(1) = 1$ und $\chi_i(1) > 1$ für $i \geq 4$. Außerdem ist $12 = |G| = \sum_{i=1}^{k} \chi_i(1)^2 = 3 + \sum_{i=4}^{k} \chi_i(1)^2$. Es folgt $k = 4$ und $\chi_4(1) = 3$. Somit hat G auch 4 Konjugationsklassen. Aus Ordnungsgründen sind die Elemente 1, $(1, 2)(3, 4)$ und $(1, 2, 3)$ paarweise nicht konjugiert. In der abelschen Gruppe G/G' sind auch $(1, 2, 3)G'$ und $(1, 3, 2)G' = (1, 2, 3)^{-1}G'$ nicht konjugiert. Somit können auch $(1, 2, 3)$ und $(1, 3, 2)$ nicht in G konjugiert sein. Also ist 1, $(1, 2)(3, 4)$, $(1, 2, 3)$ und $(1, 3, 2)$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von G. Ein Teil der Charaktertafel ergibt sich nun wie folgt

A_4	1	$(1, 2)(3, 4)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	σ	σ^{-1}
χ_3	1	1	σ^{-1}	σ
χ_4	3			

$$\sigma := e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}.$$

Die letzte Zeile ergibt sich aus der zweiten Orthogonalitätsrelation:

A_4	1	$(1,2)(3,4)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	σ	σ^{-1}
χ_3	1	1	σ^{-1}	σ
χ_4	3	-1	0	0

Lemma 2.12. *Sei $g \in G$. Für eine Darstellung Δ von G mit Charakter χ gilt*

(i) $|\chi(g)| \le \chi(1)$.

(ii) $|\chi(g)| = \chi(1) \Leftrightarrow \Delta(g) \in \mathbb{C}^\times \operatorname{id}$.

(iii) $\chi(g) = \chi(1) \Leftrightarrow g \in \operatorname{Ker}(\Delta)$.

Beweis. Sei $n := \chi(1)$, und seien $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von $\Delta(g)$. Wegen $(\Delta(g))^{|\langle g\rangle|} = \Delta(g^{|\langle g\rangle|}) = \Delta(1) = 1_n$ sind die ϵ_i Einheitswurzeln. Wir wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Vektoren $v := (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ und $w := (1, \ldots, 1)$ an:

$$|\chi(g)| = |\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n| = |\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\| = \sqrt{n}\sqrt{n} = n.$$

Dies zeigt (i). Gilt Gleichheit, so sind v und w linear abhängig und es folgt $\epsilon := \epsilon_1 = \epsilon_2 = \ldots = \epsilon_n$. Da $\Delta(g)$ diagonalisierbar ist (Aufgabe 4), ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts ϵ gleich n, d. h. $\Delta(g) = \epsilon \operatorname{id}$. Ist umgekehrt $\Delta(g) \in \mathbb{C}^\times \operatorname{id}$, so folgt sicher $|\chi(g)| = \chi(1)$. Ist sogar $\chi(g) = \chi(1)$, so ist offensichtlich $\epsilon = 1$ und $g \in \operatorname{Ker}(\Delta)$. Die Umkehrung ist hier auch klar. $\square$

Definition 2.13. Für eine Darstellung Δ mit Charakter χ setzen wir $\operatorname{Ker}(\chi) := \operatorname{Ker}(\Delta)$ und $\mathrm{Z}(\chi) := \mathrm{Z}(\Delta) := \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(1)\}$. Man nennt $\mathrm{Z}(\chi)$ das *Zentrum* von χ (bzw. Δ).

Satz 2.14. *Für jeden Charakter χ von G sind $\operatorname{Ker}(\chi)$ und $\mathrm{Z}(\chi)$ Normalteiler von G. Dabei ist $\operatorname{Ker}(\chi) \le \mathrm{Z}(\chi)$ und $\mathrm{Z}(\chi)/\operatorname{Ker}(\chi)$ ist zyklisch. Ist $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$, so ist $\mathrm{Z}(\chi)/\operatorname{Ker}(\chi) = \mathrm{Z}(G/\operatorname{Ker}(\chi))$ und $\mathrm{Z}(G) \subseteq \mathrm{Z}(\chi)$.*

Beweis. Sicher ist $\operatorname{Ker}(\chi) \trianglelefteq G$ und $\operatorname{Ker}(\chi) \subseteq \mathrm{Z}(\chi)$. Sei $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung mit Charakter χ. Offenbar ist $\mathbb{C}^\times \operatorname{id}_V \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{GL}(V))$ und damit $\mathbb{C}^\times \operatorname{id}_V \trianglelefteq \mathrm{GL}(V)$. Somit ist auch $\mathrm{Z}(\chi) = \Delta^{-1}(\mathbb{C}^\times \operatorname{id}_V) \trianglelefteq G$. Nach dem Homomorphiesatz ist außerdem $\mathrm{Z}(\chi)/\operatorname{Ker}(\chi)$ zu einer endlichen Untergruppe H von $\mathbb{C}^\times \operatorname{id}_V \cong \mathbb{C}^\times$ isomorph. Offenbar besteht H genau aus den $|H|$-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Insbesondere ist H zyklisch (in der Algebra 1 beweist man dies für beliebige Körper).

Sei nun $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$. Nach Deflation können wir $\operatorname{Ker}(\chi) = 1$ und $G \le \mathrm{GL}(V)$ annehmen (dadurch ändert sich $\mathrm{Z}(\chi)$ nicht). Offenbar ist dann

$$\mathrm{Z}(\chi) \subseteq \mathbb{C}^\times \operatorname{id}_V \cap G \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{GL}(V)) \cap G \subseteq \mathrm{Z}(G).$$

Für $x \in \mathrm{Z}(G)$ gilt umgekehrt $\Delta(g)\Delta(x) = \Delta(gx) = \Delta(xg) = \Delta(x)\Delta(g)$ für alle $g \in G$. Schurs Lemma zeigt $\Delta(x) \in \mathbb{C}^\times \operatorname{id}_V$ und damit $x \in \mathrm{Z}(\chi)$.

Die letzte Aussage folgt aus $\mathrm{Z}(G)\operatorname{Ker}(\chi)/\operatorname{Ker}(\chi) \le \mathrm{Z}(G/\operatorname{Ker}(\chi))$. $\square$

Bemerkung 2.15. Auf diese Weise kann man häufig Normalteiler konstruieren, denn jeder Normalteiler ist Kern eines Charakters (Aufgabe 9).

Satz 2.16. *Die Charaktertafel von G lässt sich aus den Klassenmultiplikationskonstanten berechnen.*

Beweis (BURNSIDE-*Algorithmus*). Sei $\mathrm{Cl}(G) = \{K_1, \ldots, K_n\}$ und $c_{ijk} := C_{K_i K_j K_k}$ die Klassenmultiplikationskonstante. Sei $T_i := (c_{ijk})_{j,k} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Seien $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ die irreduziblen Darstellungen von G und $\omega_i := \omega_{\Delta_i}$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach Lemma 1.23 gilt

$$\omega_l(K_i)\omega_l(K_j)\,\mathrm{id} = \sum_{x\in K_i} \Delta_l(x) \sum_{y\in K_j} \Delta_l(y) = \sum_{(x,y)\in K_i\times K_j} \Delta_l(xy) = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\omega_l(K_k)\,\mathrm{id}$$

für $1 \le i, j, l \le n$. Folglich ist $e_l := (\omega_l(K_k))_k \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von T_i zum Eigenwert $\omega_l(K_i)$. [1] Offenbar ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$. Jeder Eigenraum von T_i wird daher von einigen der e_l aufgespannt. Wir schneiden diese Eigenräume mit den Eigenräumen der T_j für $j \ne i$. Die nicht-trivialen Durchschnitte haben die Form

$$V_l := \{v \in \mathbb{C}^n : \forall i : T_i v = \omega_l(K_i)v\} \le \mathbb{C}^n$$

für ein $1 \le l \le n$. Da für $l \ne k$ stets ein i mit $\omega_l(K_i) \ne \omega_k(K_i)$ existiert, ist die Summe der V_l direkt. Aus Dimensionsgründen ist nun $V_l = \langle e_l \rangle$ für $l = 1, \ldots, n$. Wegen $\omega_l(K_1) = 1$ lässt sich e_l aus V_l berechnen. Nach der ersten Orthogonalitätsrelation existiert nur ein Vektor e_l, sagen wir e_1, der nur aus positiven Zahlen besteht. Er gehört zur trivialen Darstellung Δ_1. Daraus ergeben sich die Klassenlängen $|K_i| = \omega_1(K_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Wegen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\omega_l(K_i)|^2}{|K_i|} = \frac{1}{\chi_l(1)^2} \sum_{g\in G} |\chi_l(g)|^2 = \frac{|G|}{\chi_l(1)^2}(\chi_l, \chi_l)_G = \frac{|G|}{\chi_l(1)^2}$$

erhält man $\chi_l(1)$ und anschließend auch $\chi_l(g) = \frac{\chi_l(1)\omega_l(K_i)}{|K_i|}$ für $g \in K_i$. □

Bemerkung 2.17. In der Regel braucht man nicht alle Matrizen T_i, um die Charaktertafel zu berechnen. Hat zum Beispiel $\omega_l(K_i)$ als Eigenwert von T_i Vielfachheit 1, so kann man e_l direkt als Erzeuger des Eigenraums bestimmen. Optimierungen dieser Art führen zum *Dixon-Schneider-Algorithmus*, der in der Praxis häufig benutzt wird.

Satz 2.18. *Sei* $\mathrm{Cl}(G) = \{K_1, \ldots, K_n\}$ *und* $g_i \in K_i$. *Dann gilt*

$$c_{ijk} = \frac{|K_i||K_j|}{|G|} \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}$$

für $1 \le i, j, k \le n$. *Die Klassenmultiplikationskonstanten lassen sich also aus der Charaktertafel bestimmen.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.16 ist $\omega_\chi(K_i)\omega_\chi(K_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\omega_\chi(K_k)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{|K_i||K_j|}{|G|} \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)} &= \frac{1}{|G|} \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \omega_\chi(K_i)\omega_\chi(K_j)\chi(1)\overline{\chi(g_k)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^{n} c_{ijl} \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \omega_\chi(K_l)\chi(1)\overline{\chi(g_k)} = \frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^{n} c_{ijl}|K_l| \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(g_l)\overline{\chi(g_k)} \overset{1.24}{=} c_{ijk}.\end{aligned}$$

□

[1] Die Eigenwerte von T_i lassen sich zwar berechnen, aber deren Zuordnung zu ω_l ist nicht eindeutig.

3 Ganz-algebraische Zahlen

Definition 3.1. Eine Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ heißt *ganz-algebraisch*, falls sie Nullstelle eines normierten, ganzzahligen Polynoms ist, d. h. es existieren Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ mit $\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + a_1\zeta + a_0 = 0$.

Beispiel 3.2.

(i) Ganze Zahlen sind offenbar ganz-algebraisch.

(ii) Einheitswurzeln sind ganz-algebraisch als Nullstellen von Polynomen der Form $X^n - 1$.

Lemma 3.3. *Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ganz-algebraisch, so auch $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$. (Die ganz-algebraischen Zahlen bilden also einen Ring.)*

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \alpha^n &= a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0, \\ \beta^m &= b_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + b_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{m-1} \in \mathbb{Z}$. Sei $S := \{\alpha^i\beta^j : i = 0, \ldots, n-1,\ j = 0, \ldots, m-1\}$ und $\gamma := \alpha + \beta$ (bzw. $\alpha\beta$). Für $s \in S$ existieren dann Zahlen $c_{st} \in \mathbb{Z}$ mit $\gamma s = \sum_{t \in S} c_{st} t$ (benutze (3.1)). Für $A := (c_{st})_{s,t \in S} \in \mathbb{Z}^{nm \times nm}$ und $v := (s : s \in S)$ gilt $Av = \gamma v$. Also ist γ Nullstelle des normierten, ganzzahligen Polynoms $\det(X1_{nm} - A)$. □

Bemerkung 3.4. Ist χ ein Charakter von G, so ist $\chi(g)$ als Summe von Einheitswurzeln (siehe zum Beispiel Beweis von Lemma 2.12) ganz-algebraisch für $g \in G$.

Lemma 3.5. *Ist $\zeta \in \mathbb{Q}$ ganz-algebraisch, so ist $\zeta \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei $\zeta = \frac{r}{s}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$. Nach Voraussetzung existieren $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{r^n}{s^n} = \frac{a_{n-1}r^{n-1}}{s^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1 r}{s} + a_0.$$

Umstellen ergibt

$$r^n = s(a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1}).$$

Also ist $s \mid r^n$. Wegen $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$ folgt $s = \pm 1$ und $\zeta \in \mathbb{Z}$. □

Lemma 3.6. *Für $C \in \mathrm{Cl}(G)$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ist $\omega_\chi(C)$ ganz-algebraisch.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.16 gezeigt, ist $\omega_\chi(C)$ ein Eigenwert einer ganzzahligen Matrix T. Also ist $\omega_\chi(C)$ als Nullstelle des normierten, ganzzahligen charakteristischen Polynoms von T ganz-algebraisch. □

Satz 3.7. *Für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ist* $\boxed{\chi(1) \mid |G|}$.

Beweis. Seien $g_1, \ldots, g_k \in G$ Repräsentanten für die Konjugationsklassen $C_1, \ldots, C_k$ von G. Nach der ersten Orthogonalitätsrelation ist dann

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = \frac{1}{\chi(1)} \sum_{x \in G} \chi(x)\overline{\chi(x)} = \frac{1}{\chi(1)} \sum_{i=1}^{k} |C_i|\chi(g_i)\chi(g_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{k} \omega_\chi(C_i)\chi(g_i^{-1}).$$

Nach Lemma 3.6 ist $\frac{|G|}{\chi(1)}$ ganz-algebraisch. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 3.5. □

Satz 3.8. *Sei* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ *und* $g \in C \in \mathrm{Cl}(G)$ *mit* $\mathrm{ggT}(\chi(1), |C|) = 1$. *Dann ist* $g \in \mathrm{Z}(\chi)$ *oder* $\chi(g) = 0$.

Beweis. Sei $\alpha := \frac{\chi(g)}{\chi(1)}$. Wegen $\mathrm{ggT}(\chi(1), |C|) = 1$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a\chi(1) + b|C| = 1$. Mit $\omega_\chi(C)$ und $\chi(g)$ ist auch

$$\alpha = \frac{\chi(g)}{\chi(1)}(a\chi(1) + b|C|) = a\chi(g) + b\omega_\chi(C)$$

ganz-algebraisch. Sei $n := |\langle g \rangle|$ und $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$. Als Summe n-ter Einheitswurzeln ist $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\zeta)$. Sei $\mathcal{G}$ die Galoisgruppe der Galois-Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$. Für $\sigma \in \mathcal{G}$ ist auch $\sigma(\alpha)$ ganz-algebraisch, denn α und $\sigma(\alpha)$ sind Nullstellen des gleichen ganzzahligen Polynoms. Daher ist auch $\beta := \prod_{\sigma \in \mathcal{G}} \sigma(\alpha)$ ganz-algebraisch. Wegen $\sigma(\beta) = \beta$ für alle $\sigma \in \mathcal{G}$ liegt β im Fixkörper von $\mathcal{G}$, d. h. $\beta \in \mathbb{Q}$ (Galoistheorie). Nach Lemma 3.5 ist $\beta \in \mathbb{Z}$. Im Fall $g \notin \mathrm{Z}(\chi)$ ist $|\alpha| < 1$ (Lemma 2.12). Mit $\chi(g)$ ist auch $\sigma(\chi(g))$ Summe von $m := \chi(1)$ vielen n-ten Einheitswurzeln $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$. Es folgt

$$|\sigma(\chi(g))| = |\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_m| \leq |\epsilon_1| + \ldots + |\epsilon_m| = m$$

und $|\sigma(\alpha)| \leq 1$ für $\sigma \in \mathcal{G}$. Folglich ist $|\beta| < 1$, d. h. $\beta = 0$. Also ist $\alpha = 0$ und $\chi(g) = 0$. □

Satz 3.9. *Sei* G *einfach und nichtabelsch,* $C \in \mathrm{Cl}(G)$ *und* $|C|$ *Potenz einer Primzahl* p. *Dann ist* $C = \{1\}$.

Beweis. Wir nehmen $C \neq \{1\}$ an und wählen $g \in C$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$. Da G einfach ist, ist $\mathrm{Ker}(\chi) = 1$. Da G nichtabelsch ist, ist auch $\mathrm{Z}(\chi) = 1$ (Satz 2.14). Im Fall $p \nmid \chi(1)$ ist also $\chi(g) = 0$ nach Satz 3.8. Daher ist

$$\sum_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}(G),\\ p \mid \chi(1)}} \frac{\chi(1)}{p}\chi(g) = \frac{1}{p} \sum_{1_G \neq \chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi(g) = \frac{1}{p}\Bigg(\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi(g) - 1_G(1)1_G(g)\Bigg) = -\frac{1}{p} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$$

ganz-algebraisch. Widerspruch. □

Satz 3.10 (Burnside). *Sei* $|G| = p^a q^b$ *mit Primzahlen* p, q *und* $a, b \in \mathbb{N}_0$. *Dann ist* G *auflösbar.*

Beweis. (Induktion nach $|G|$) O. B. d. A. sei $G \neq 1$. Sei N ein maximaler Normalteiler von G. Ist $N \neq 1$, so sind N und G/N nach Induktion auflösbar, also auch G. Daher sei $N = 1$, d. h. G ist einfach und o. B. d. A. nichtabelsch. Sei $P \neq 1$ eine Sylowgruppe von G, $g \in \mathrm{Z}(P) \setminus \{1\}$ und C die Konjugationsklasse von g. Dann ist $|C| = |G : \mathrm{C}_G(g)| \bigm| |G : P| = q^b$ eine Primzahlpotenz. Nach Satz 3.9 ist $C = \{1\}$. Widerspruch. □

Satz 3.11. *Für* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ *ist* $\boxed{\chi(1) \bigm| |G : \mathrm{Z}(\chi)|.}$

Beweis (Navarro). Sei $\Delta\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung mit Charakter χ. Wegen $|G : \mathrm{Z}(\chi)| = |G/\operatorname{Ker}(\chi) : \mathrm{Z}(\chi)/\operatorname{Ker}(\chi)|$ können wir Δ durch seine Deflation $G/\operatorname{Ker}(\chi) \to \mathrm{GL}(V)$ ersetzen und $\operatorname{Ker}(\chi) = 1$ annehmen. Nach Satz 2.14 ist $Z := \mathrm{Z}(\chi) = \mathrm{Z}(G)$ und $\Delta(z) = \lambda(z)\,\mathrm{id}_V$ mit $\lambda(z) \in \mathbb{C}$ für $z \in Z$. Seien $K_1, \ldots, K_s \in \mathrm{Cl}(G)$ die Konjugationsklassen, auf denen χ nicht verschwindet. Für $g_i \in K_i$ und $z \in Z$ gilt $\Delta(g_i z) = \Delta(g_i)\lambda(z)$ und

$$\chi(g_i z) = \chi(g_i)\lambda(z) = \frac{\chi(g_i)\chi(z)}{\chi(1)}.$$

Da χ treu ist, folgt $\chi(g_i z) \neq \chi(g_i)$ für $z \neq 1$. Ggf. sind g_i und $g_i z$ nicht konjugiert. Dies zeigt $K_i z = K_j$ für ein $j \neq i$. Bei geeigneter Anordnung gilt nun

$$\bigcup_{i=1}^{s} K_i = \bigcup_{i=1}^{t} \dot{\bigcup_{z \in Z}} K_i z$$

mit $t|Z| = s$. Außerdem gilt

$$\chi(g_i z)\overline{\chi(g_i z)} = \chi(g_i)\overline{\chi(g_i)}\frac{|\chi(z)|^2}{\chi(1)^2} = \chi(g_i)\overline{\chi(g_i)}.$$

Daher ist

$$\frac{|G : Z|}{\chi(1)} = \sum_{g \in G} \frac{\chi(g)\overline{\chi(g)}}{|Z|\chi(1)} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{z \in Z} \frac{|K_i|\chi(g_i z)\overline{\chi(g_i z)}}{|Z|\chi(1)} = \sum_{i=1}^{t} \frac{|K_i|\chi(g_i)\overline{\chi(g_i)}}{\chi(1)} = \sum_{i=1}^{t} \omega_\chi(K_i)\overline{\chi(g_i)}$$

ganz-algebraisch nach Lemma 3.6. Aus Lemma 3.5 folgt die Behauptung. □

4 Cliffordtheorie

Bemerkung 4.1. Für $H \leq G$ und $\varphi \in \mathrm{CF}(G)$ ist offenbar die Einschränkung (Restriktion) $\varphi_H \in \mathrm{CF}(H)$. Wir werden nun umgekehrt aus $\varphi \in \mathrm{CF}(H)$ eine Klassenfunktion auf G konstruieren.

Definition 4.2. Für $H \leq G$ und $\varphi \in \mathrm{CF}(H)$ sei

$$\boxed{\varphi^G : G \to \mathbb{C},\ x \mapsto \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G,\\ gxg^{-1} \in H}} \varphi(gxg^{-1}).}$$

Man nennt φ^G die *Induktion* von φ.

Satz 4.3. *Für $\varphi \in \mathrm{CF}(H)$ ist $\varphi^G \in \mathrm{CF}(G)$.*

Beweis. Für $x, y \in G$ ist

$$\varphi^G(yxy^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G,\\ gyxy^{-1}g^{-1} \in H}} \varphi(gyxy^{-1}g^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{h \in G,\\ hxh^{-1} \in H}} \varphi(hxh^{-1}) = \varphi^G(x).$$ □

Bemerkung 4.4.

(i) Man sieht leicht, dass die Induktion eine lineare Abbildung von $\mathrm{CF}(H)$ nach $\mathrm{CF}(G)$ ist.

(ii) Für $H \le G$, $\varphi \in \mathrm{CF}(H)$ und $x \in G$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi^G(x) &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G,\\ g^{-1}xg \in H}} \varphi(g^{-1}xg) = \frac{1}{|H|} \sum_{gH \in G/H} \sum_{\substack{h \in H,\\ h^{-1}g^{-1}xgh \in H}} \varphi(h^{-1}g^{-1}xgh)\\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{gH \in G/H, h \in H,\\ g^{-1}xg \in H}} \varphi(g^{-1}xg) = \sum_{\substack{gH \in G/H,\\ xgH = gH}} \varphi(g^{-1}xg).\end{aligned}$$

Dies ist nützlich für die praktische Berechnung.

Satz 4.5.

(i) Für $K \le H \le G$ und $\varphi \in \mathrm{CF}(K)$ ist $(\varphi^H)^G = \varphi^G$. Die Induktion von Klassenfunktionen ist also transitiv.

(ii) Für $\chi \in \mathrm{CF}(G)$ und $\varphi \in \mathrm{CF}(H)$ ist $\boxed{\chi\varphi^G = (\chi_H\varphi)^G}$ und $\boxed{(\chi, \varphi^G)_G = (\chi_H, \varphi)_H}$ (Frobenius-Reziprozität).

Beweis.

(i) Nach Bemerkung 4.4(ii) gilt

$$\begin{aligned}(\varphi^H)^G(x) &= \sum_{\substack{gH \in G/H,\\ xgH = gH}} \varphi^H(g^{-1}xg) = \sum_{\substack{gH \in G/H,\\ xgH = gH}} \sum_{\substack{hK \in H/K,\\ g^{-1}xghK = hK}} \varphi(h^{-1}g^{-1}xgh)\\ &= \sum_{\substack{aK \in G/K,\\ xaK = aK}} \varphi(a^{-1}xa) = \varphi^G(x)\end{aligned}$$

für $x \in G$.

(ii) Wie in (i) gilt

$$(\chi\varphi^G)(x) = \chi(x) \sum_{\substack{gH \in G/H,\\ xgH = gH}} \varphi(g^{-1}xg) = \sum_{\substack{gH \in G/H,\\ xgH = gH}} (\chi\varphi)(g^{-1}xg) = (\chi_H\varphi)^G(x)$$

für $x \in G$ und

$$\begin{aligned}(\chi, \varphi^G)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \sum_{\substack{gH \in G/H,\\ xgH = gH}} \overline{\varphi(g^{-1}xg)} = \frac{1}{|G|} \sum_{gH \in G/H} \sum_{\substack{x \in G,\\ g^{-1}xg \in H}} \chi(g^{-1}xg)\overline{\varphi(g^{-1}xg)}\\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{gH \in G/H} \sum_{h \in H} \chi(h)\overline{\varphi(h)} = \frac{|G/H|}{|G|} \sum_{h \in H} \chi(h)\overline{\varphi(h)} = (\chi_H, \varphi)_H.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.6. Die Frobenius-Reziprozität besagt, dass Restriktion und Induktion zueinander adjungierte Abbildungen zwischen $\mathrm{CF}(G)$ und $\mathrm{CF}(H)$ sind.

Satz 4.7. *Für einen Charakter φ von $H \le G$ ist φ^G ein Charakter von G vom Grad $|G : H|\varphi(1)$.*

Beweis. Wir schreiben $\varphi^G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi$ mit $a_\chi \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$a_\chi = (\chi, \varphi^G)_G = (\chi_H, \varphi)_H \in \mathbb{N}_0,$$

denn χ_H ist ein Charakter von H. Also ist φ^G ein Charakter von G. Offenbar ist auch $\varphi^G(1) = |G : H|\varphi(1)$. □

Beispiel 4.8.

(i) 1_1^G ist der reguläre Charakter von G. Insbesondere ist φ^G nicht unbedingt irreduzibel, falls φ irreduzibel ist. Ist φ reduzibel, so muss auch φ^G reduzibel sein wegen der Linearität der Induktion.

(ii) Sei $H := \langle(1, 2, 3)\rangle$ und $G := S_3$. Sei φ ein nichttrivialer Charakter von H vom Grad 1. Dann ist $\varphi^G(1) = 2$, $\varphi^G((1, 2)) = 0$, $\varphi^G((1, 2, 3)) = -1$. Insbesondere ist $\varphi^G \in \mathrm{Irr}(G)$.

Definition 4.9. Sei $H \le G$, $\varphi \in \mathrm{CF}(H)$ und $g \in G$. Dann ist ${}^g\varphi \in \mathrm{CF}(gHg^{-1})$ mit ${}^g\varphi(x) := \varphi(g^{-1}xg)$ für $x \in gHg^{-1}$. Wir nennen $G_\varphi := \{g \in G : {}^g\varphi = \varphi\} \le G$ die *Trägheitsgruppe* von φ. Außerdem sei

$$\mathrm{Irr}(G|\varphi) := \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) : (\chi_H, \varphi)_H \neq 0\}.$$

Bemerkung 4.10.

(i) Offenbar ist $H \le G_\varphi \le \mathrm{N}_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ ($\mathrm{N}_G(H)$ ist der *Normalisator* von H in G).

(ii) Wie üblich ist

$${}^g\varphi = {}^h\varphi \Longleftrightarrow h^{-1}g \in G_\varphi \Longleftrightarrow gG_\varphi = hG_\varphi$$

für $g, h \in G$.

(iii) Sei $\Delta : H \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung mit Charakter χ. Für $g \in G$ ist dann offenbar ${}^g\Delta : gHg^{-1} \to \mathrm{GL}(V)$, $x \mapsto \Delta(g^{-1}xg)$ eine Darstellung von gHg^{-1} mit Charakter ${}^g\chi$.

(iv) Für $\varphi, \psi \in \mathrm{CF}(H)$ und $g \in G$ ist $\boxed{({}^g\varphi, {}^g\psi)_{gHg^{-1}} = (\varphi, \psi)_H,}$ denn

$$\frac{1}{|gHg^{-1}|} \sum_{x \in gHg^{-1}} {}^g\varphi(x)\overline{{}^g\psi(x)} = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} \varphi(x)\overline{\psi(x)}.$$

(v) Für $K \le H \le G$, $\varphi \in \mathrm{CF}(H)$ und $g \in G$ ist $\boxed{{}^g(\varphi_K) = ({}^g\varphi)_{gKg^{-1}}.}$

(vi) Für $N \trianglelefteq G$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(N)$ ist $({}^g\chi, {}^g\chi)_N = (\chi, \chi)_N = 1$ und ${}^g\chi \in \mathrm{Irr}(N)$. Man sagt, χ und ${}^g\chi$ sind *konjugiert*.

Satz 4.11. *Sei $N \trianglelefteq G$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$ mit $e := (\chi_N, \psi)_N \neq 0$. Dann ist*

$$\chi_N = e \sum_{gG_\psi \in G/G_\psi} {}^g\psi.$$

Beweis. Nach Frobenius-Reziprozität ist χ ein Bestandteil von ψ^G. Daher ist χ_N ein Bestandteil von $(\psi^G)_N$. Für $x \in N$ gilt

$$\psi^G(x) = \sum_{\substack{gN \in G/N,\\ xgN = gN}} \psi(gxg^{-1}) = \sum_{gN \in G/N} {}^g\psi(x)$$

nach Bemerkung 4.4. Also ist jeder irreduzible Bestandteil von χ_N zu ψ konjugiert. Für $g \in G$ gilt

$$(\chi_N, {}^g\psi)_N = ({}^{g^{-1}}(\chi_N), \psi)_N = (({}^{g^{-1}}\chi)_N, \psi)_N = (\chi_N, \psi)_N = e$$

nach Bemerkung 4.10. Dies liefert die Behauptung. □

Definition 4.12. In der Situation von Satz 4.11 nennt man e den *Verzweigungsindex* von χ bzgl. N. Man kann zeigen, dass $e \mid |G : N|$ gilt (ohne Beweis).

Satz 4.13 (Clifford-Korrespondenz)**.** *Für $N \trianglelefteq G$ und $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$ ist die Abbildung*

$$\Phi : \mathrm{Irr}(G_\psi|\psi) \to \mathrm{Irr}(G|\psi),$$
$$\chi \mapsto \chi^G$$

eine Bijektion mit $(\chi_N, \psi)_N = ((\chi^G)_N, \psi)_N$.

Beweis. Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G_\psi|\psi)$ und sei φ ein irreduzibler Bestandteil von χ^G. Wir zeigen zunächst $\varphi \in \mathrm{Irr}(G|\psi)$. Wir schreiben $\varphi_{G_\psi} := \sum_{\tau \in \mathrm{Irr}(G_\psi)} a_\tau \tau$ mit $a_\tau \geq 0$ und $a_\chi = (\varphi_{G_\psi}, \chi)_{G_\psi} = (\varphi, \chi^G)_G \geq 1$. Nach Satz 4.11 ist $\chi_N = e\psi$ mit $e := (\chi_N, \psi)_N$. Es folgt

$$f := (\varphi_N, \psi)_N = \sum_{\tau \in \mathrm{Irr}(G_\psi)} a_\tau (\tau_N, \psi)_N \geq a_\chi (\chi_N, \psi)_N \geq e > 0,$$

d. h. $\varphi \in \mathrm{Irr}(G|\psi)$. Satz 4.11 impliziert

$$\varphi(1) = \varphi_N(1) = f \sum_{gG_\psi \in G/G_\psi} {}^g\psi(1) \geq e|G : G_\psi|\psi(1) = |G : G_\psi|\chi(1) = \chi^G(1) \geq \varphi(1).$$

Dies zeigt $\chi^G = \varphi \in \mathrm{Irr}(G|\psi)$ und $e = f$. Also ist Φ wohldefiniert.

Sei nun $\theta \in \mathrm{Irr}(G|\psi)$ gegeben. Wegen $\theta_N = (\theta_{G_\psi})_N$ existiert ein $\chi \in \mathrm{Irr}(G_\psi|\psi)$ mit $(\theta, \chi^G)_G = (\theta_T, \chi)_{G_\psi} \neq 0$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist $\chi^G = \theta$, d. h. Φ ist surjektiv. Außerdem ist $(\theta_N, \psi)_N = (\chi_N, \psi)_N$, d. h. χ ist der einzige irreduzible Bestandteil von θ_{G_ψ}, der in $\mathrm{Irr}(G_\psi|\psi)$ liegt. Dies zeigt die Injektivität von Φ. □

Satz 4.14 (Itô)**.** *Sei A eine abelsche Untergruppe von G und $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Dann gilt:*

(i) $\chi(1) \leq |G : A|$.

(ii) Ist $A \trianglelefteq G$, so ist $\chi(1) \mid |G : A|$.

Beweis.

(i) Aufgabe 12.

(ii) Sei ψ ein irreduzibler Bestandteil von χ_A. Nach Satz 4.13 existiert ein $\widetilde{\chi} \in \mathrm{Irr}(G_\psi)$ mit $\widetilde{\chi}^G = \chi$ und $\widetilde{\chi}_A = e\psi$ für ein $e \in \mathbb{N}$. Da A abelsch ist, gilt $|\widetilde{\chi}(x)| = |e\psi(x)| = e\psi(1) = e = \widetilde{\chi}(1)$ für $x \in A$, d. h. $A \subseteq \mathrm{Z}(\widetilde{\chi})$. Nach Satz 3.11 ist $\widetilde{\chi}(1) \bigm| |G_\psi : \mathrm{Z}(\widetilde{\chi})| \bigm| |G_\psi : A|$ und daher $\chi(1) = |G : G_\psi|\widetilde{\chi}(1) \bigm| |G : G_\psi||G_\psi : A| = |G : A|$. □

Satz 4.15. *Sei $N \trianglelefteq G$ und $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$ mit $G_\psi = G$. Dann ist $\psi^G = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} e_\chi\chi$, wobei e_χ der Verzweigungsindex von χ ist (falls $e_\chi > 0$). Insbesondere ist $\sum e_\chi^2 = |G : N|$.*

Beweis. Wir schreiben $\psi^G = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} f_\chi\chi$. Im Fall $f_\chi \neq 0$, ist $\chi_N = e_\chi\psi$ nach Satz 4.11. Dabei gilt $f_\chi = (\chi, \psi^G)_G = (\chi_N, \psi)_N = (e_\chi\psi, \psi)_N = e_\chi$. Es folgt

$$|G : N|\psi(1) = \psi^G(1) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} e_\chi\chi(1) = \psi(1) \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} e_\chi^2$$

und $\sum e_\chi^2 = |G : N|$. □

Bemerkung 4.16. Die Zahlen e_χ verhalten sich also wie Charaktergrade. In folgendem Satz werden wir sehen, dass es tatsächlich Charaktergrade sind, falls $e_\chi = 1$ für ein $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ gilt.

Satz 4.17 (Gallagher)**.** *Sei $N \trianglelefteq G$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\psi := \chi_N \in \mathrm{Irr}(N)$. Dann ist $\{\lambda\chi : \lambda \in \mathrm{Irr}(G/N)\}$ die Menge der irreduziblen Bestandteile von ψ^G.*

Beweis. Wie üblich fassen wir die Charaktere von G/N durch Inflation als Charaktere von G auf. Nach Aufgabe 11 ist $(\chi_N)^G = \chi\rho$, wobei ρ der reguläre Charakter von G/N ist. Also ist

$$\psi^G = \sum_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G/N)} \lambda(1)\chi\lambda.$$

Nach Satz 4.15 ist

$$|G : N| = (\psi^G, \psi^G)_G = \sum_{\lambda,\lambda'\in\mathrm{Irr}(G/N)} \lambda(1)\lambda'(1)(\chi\lambda, \chi\lambda')_G \geq \sum_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G/N)} \lambda(1)^2 = |G : N|.$$

Dies zeigt, dass die $\chi\lambda$ mit $\lambda \in \mathrm{Irr}(G/N)$ irreduzibel und paarweise verschieden sind. □

Satz 4.18. *Sei $N \trianglelefteq G$ und G/N zyklisch. Für jedes $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$ mit $G_\psi = G$ existiert dann ein Fortsetzung $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\chi_N = \psi$.*

Beweis. Sei $\Delta : N \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Darstellung mit Charakter ψ. Sei $G/N = \langle gN\rangle$ und $k := |G/N|$. Wegen $G_\psi = G$ sind Δ und ${}^g\Delta$ ähnlich. Sei also $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $A\Delta(x)A^{-1} = \Delta(gxg^{-1})$ für alle $x \in N$. Induktiv folgt

$$A^k\Delta(x)A^{-k} = \Delta(g^kxg^{-k}) = \Delta(g^k)\Delta(x)\Delta(g^k)^{-1}$$

für alle $x \in N$. Nach Schurs Lemma ist $A^{-k}\Delta(g^k) = \lambda 1_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Sei $\mu \in \mathbb{C}^\times$ mit $\mu^k = \lambda$. Wegen $(\mu A)^k = \lambda A^k = \Delta(g^k)$ ist die Abbildung

$$\Gamma : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \qquad g^ix \mapsto (\mu A)^i\Delta(x)$$

mit $i \in \mathbb{Z}$ und $x \in N$ wohldefiniert. Für $i, j \in \mathbb{Z}$ und $x, y \in N$ gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(g^i x \cdot g^j y) &= \Gamma(g^{i+j} \cdot (g^{-j} x g^j) y) = (\mu A)^{i+j} \Delta(g^{-j} x g^j) \Delta(y) = (\mu A)^{i+j} A^{-j} \Delta(x) A^j \Delta(y) \\ &= (\mu A)^i \Delta(x) (\mu A)^j \Delta(y) = \Gamma(g^i x) \Gamma(g^j y).\end{aligned}$$

Also ist Γ eine Darstellung, die Δ fortsetzt. Mit Δ muss auch Γ irreduzibel sein. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Beispiel 4.19. Wir berechnen die Charaktertafel von $G := S_4$ aus der Charaktertafel von $N := A_4$. Die in Beispiel 2.11 konstruieren Charaktere χ_2 und χ_3 von N sind unter G konjugiert. Daher ist $\chi_2^G = \chi_3^G \in \mathrm{Irr}(G)$. Da G/N zyklisch ist, besitzen die verbleibenden Charaktere je zwei Fortsetzungen nach G. Dies ergibt bereits folgenden Teil der Charaktertafel:

S_4	1	$(1,2)$	$(1,2)(3,4)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$
1_G	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	1	-1
χ_2^G	2	0	2	-1	0
ψ	3	a	-1	0	b
$\psi\,\mathrm{sgn}$	3	$-a$	-1	0	$-b$

Aus der zweiten Orthogonalitätsrelation folgt $ab = -1$. Nach Lemma 2.12 ist a eine Summe von zweiten Einheitswurzeln und somit eine ganze Zahl. Da b ganz-algebraisch ist, folgt $a = -b = \pm 1$.

S_4	1	$(1,2)$	$(1,2)(3,4)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$
1_G	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	1	-1
χ_2^G	2	0	2	-1	0
ψ	3	1	-1	0	-1
$\psi\,\mathrm{sgn}$	3	-1	-1	0	1

Satz 4.20 (Taunt). *Hat G abelsche p-Sylowgruppen, so ist $p \nmid |G' \cap \mathrm{Z}(G)|$.*

Beweis. Nehmen wir indirekt an, dass $U \le G' \cap \mathrm{Z}(G)$ mit $|U| = p$ existiert. Sei $U \le P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und $1_U \ne \lambda \in \mathrm{Irr}(U)$. Sei $\mu \in \mathrm{Irr}(P)$ mit $(\mu, \lambda^P)_P \ne 0$. Dann ist $(\mu_U, \lambda)_U \ne 0$ und $\mu_U = \lambda$ wegen $\mu(1) = 1$ (P abelsch). Wir schreiben

$$\mu^G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi.$$

Wegen $p \nmid |G : P| = \mu^G(1)$ existiert ein $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $a_\chi > 0$ und $p \nmid \chi(1) =: n$. Insbesondere ist $(\mu, \chi_P)_P \ne 0$ (Frobenius-Reziprozität). Damit ist auch $\mu_U = \lambda$ ein irreduzibler Bestandteil von χ_U. Sei Δ eine Darstellung mit Charakter χ. Für $x \in U \subseteq \mathrm{Z}(G) \subseteq \mathrm{Z}(\chi)$ ist dann $\Delta(x) = \lambda(x) 1_n$ (Satz 2.14). Es folgt $\chi_U = n\lambda$. Da $G/\mathrm{Ker}(\det \Delta) \le \mathbb{C}^\times$ abelsch ist, gilt $G' \subseteq \mathrm{Ker}(\det \Delta)$. Wegen $U \subseteq G'$ gilt also insbesondere

$$1 = \det \Delta(x) = \lambda(x)^n$$

für alle $x \in U$. Andererseits ist auch $\lambda(x)^p = \lambda(x^p) = 1$. Wegen $\mathrm{ggT}(p, n) = 1$ existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha p + \beta n = 1$. Man erhält: $\lambda(x) = (\lambda(x)^p)^\alpha (\lambda(x)^n)^\beta = 1$ für alle $x \in U$. Dies widerspricht $\lambda \ne 1_U$. $\square$

5 Frobeniusgruppen

Definition 5.1. Eine *Gruppenoperation* von G auf einer nichtleeren Menge Ω ist ein Homomorphismus $f : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$. Wir schreiben ${}^g\omega := (f(g))(\omega)$ für $g \in G$ und $\omega \in \Omega$. Man sagt auch: G *operiert* auf Ω.

Satz 5.2 (BRAUERs Permutationslemma)**.** *Sei H eine endliche Gruppe, sodass G auf $\mathrm{Cl}(H)$ und $\mathrm{Irr}(H)$ operiert. Für alle $g \in G$, $C \in \mathrm{Cl}(H)$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(H)$ gelte dabei ${}^g\chi({}^gC) = \chi(C)$. Dann stimmt der Zyklentyp von $g \in G$ in $\mathrm{Sym}(\mathrm{Cl}(H))$ mit dem Zyklentyp von g in $\mathrm{Sym}(\mathrm{Irr}(H))$ überein. Insbesondere gilt*

$$|\{C \in \mathrm{Cl}(H) : {}^gC = C\}| = |\{\chi \in \mathrm{Irr}(H) : {}^g\chi = \chi\}|$$

für alle $g \in G$.

Beweis. Sei $\mathrm{Cl}(H) = \{C_1, \ldots, C_k\}$ und $\mathrm{Irr}(H) = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$. Sei $X := (\chi_i(C_j))_{i,j}$ die Charaktertafel von H. Sei $g \in G$ fest. Die Operation von g auf $\mathrm{Cl}(H)$ (bzw. $\mathrm{Irr}(H)$) wird dann durch eine Permutationsmatrix P (bzw. Q) beschrieben. Dabei gilt $QX = ({}^g\chi_i(C_j)) = (\chi_i({}^{g^{-1}}C_j)) = XP$. Da X invertierbar ist (Bemerkung 2.1), gilt $Q = XPX^{-1}$, d. h. Q und P sind ähnlich. Sei $(l_1, \ldots, l_n)$ der Zyklentyp von P. Nach Aufgabe 13 sind die Eigenwerte von P gegeben durch: $\{e^{2\pi ij/l_1} : j = 0, \ldots, l_1 - 1\} \cup \ldots \cup \{e^{2\pi ij/l_n} : j = 0, \ldots, l_n - 1\}$ (mit Vielfachheiten). Da P und Q die gleichen Eigenwerte haben, ist $(l_1, \ldots, l_n)$ auch der Zyklentyp von Q. Die letzte Behauptung erhält man durch Zählen von Einerzyklen. $\square$

Definition 5.3. Eine endliche Gruppe G heißt *Frobeniusgruppe*, falls eine Untergruppe $1 < H < G$ mit $H \cap gHg^{-1} = 1$ für alle $g \in G \setminus H$ existiert. Man nennt H *Frobeniuskomplement*.

Beispiel 5.4.

(i) Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ mit $|P| = p$ und $\mathrm{N}_G(P) = P < G$. Dann ist G offenbar eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskomplement P. Insbesondere ist S_3 eine Frobeniusgruppe.

(ii) Sei K ein endlicher Körper mit $|K| > 2$. Für $a \in K^\times$ und $b \in K$ definieren wir $f_{a,b} : K \to K$, $x \mapsto ax + b$. Dann ist

$$\mathrm{Aff}(1, K) := \{f_{a,b} : a \in K^\times, b \in K\} \le \mathrm{Sym}(K)$$

eine Frobeniusgruppe (Aufgabe 15).

Bemerkung 5.5. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass ein Frobeniuskomplement H von G stets ein normales Komplement N besitzt, d. h. $G = HN$ und $H \cap N = 1$.

Lemma 5.6. *Sei H ein Frobeniuskomplement in G. Wir setzen*

$$N := G \setminus \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \cup \{1\}.$$

Dann ist $|N| = |G : H|$ (als Menge). Ist $M \trianglelefteq G$ mit $H \cap M = 1$, dann folgt $M \subseteq N$.

Beweis. Für $x, y \in G$ ist

$$xHx^{-1} = yHy^{-1} \iff y^{-1}x \in \mathrm{N}_G(H) = H \iff xH = yH.$$

Im Fall $xHx^{-1} \neq yHy^{-1}$ ist $|xHx^{-1} \cap yHy^{-1}| = |x(H \cap x^{-1}yHy^{-1}x)x^{-1}| = |H \cap x^{-1}yHy^{-1}x| = 1$. Dies zeigt

$$\Big|\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}\Big| = |G:H|(|H|-1)+1.$$

Es folgt $|N| = |G| - |G:H|(|H|-1) = |G:H|$. Für $M \trianglelefteq G$ mit $H \cap M = 1$ ist auch $gHg^{-1} \cap M = g(H \cap M)g^{-1} = 1$ für alle $g \in G$. Also ist $M \subseteq N$. □

Lemma 5.7. *Sei H ein Frobeniuskomplement in G, und sei $\psi \in \mathrm{CF}(H)$ mit $\psi(1) = 0$. Dann ist $(\psi^G)_H = \psi$.*

Beweis. Sei $1 \neq h \in H$ und $g \in G$ mit $ghg^{-1} \in H$. Dann ist $1 \neq ghg^{-1} \in H \cap gHg^{-1}$ und $g \in H$. Nach Definition ist also

$$\psi^G(h) = \frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}\psi(ghg^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}\psi(h) = \psi(h).$$

Außerdem ist $\psi^G(1) = |G:H|\psi(1) = 0 = \psi(1)$. □

Satz 5.8 (Frobenius). *Sei G eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskomplement H. Dann existiert ein $N \trianglelefteq G$ mit $G = HN$ und $H \cap N = 1$.*

Beweis. Sei $1_H \neq \psi \in \mathrm{Irr}(H)$ und $\theta := \psi - \psi(1)1_H$. Dann ist sicher $\theta \in \mathrm{CF}(H)$ und $\theta(1) = 0$. Nach Lemma 5.7 ist

$$1 + \psi(1)^2 = (\theta, \theta)_H = (\theta, (\theta^G)_H)_H = (\theta^G, \theta^G)_G.$$

Außerdem ist $(\theta^G, 1_G)_G = (\theta, 1_H)_H = -\psi(1)$. Folglich ist $\widetilde{\psi} := \theta^G + \psi(1)1_G \in \mathrm{CF}(G)$ mit

$$(\widetilde{\psi}, \widetilde{\psi})_G = (\theta^G, \theta^G)_G + 2\psi(1)(\theta^G, 1_G)_G + \psi(1)^2 = 1.$$

Mit θ sind auch θ^G und $\widetilde{\psi}$ virtuelle Charaktere (Bemerkung 1.26). Also ist $\pm\widetilde{\psi} \in \mathrm{Irr}(G)$. Für $h \in H$ gilt

$$\widetilde{\psi}(h) = \theta^G(h) + \psi(1) = \theta(h) + \psi(1) = \psi(h).$$

Insbesondere ist $\widetilde{\psi}(1) = \psi(1) > 0$. Dies zeigt $\widetilde{\psi} \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\widetilde{\psi}_H = \psi$. Wir setzen zusätzlich $\widetilde{1_H} := 1_G$. Sei

$$M := \bigcap_{\psi\in\mathrm{Irr}(H)} \mathrm{Ker}(\widetilde{\psi}) \trianglelefteq G.$$

Dann ist

$$M \cap H \subseteq \bigcap_{\psi\in\mathrm{Irr}(H)} \mathrm{Ker}(\psi) = 1$$

nach Aufgabe 9. Nach Lemma 5.6 ist also $M \subseteq N$. Für $g \in N$ gilt umgekehrt

$$\widetilde{\psi}(g) - \widetilde{\psi}(1) = \widetilde{\psi}(g) - \psi(1) = \theta^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{\substack{x\in G,\\ g\in x^{-1}Hx}} \theta(xgx^{-1}) = 0$$

für alle $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$. Dies zeigt $N \subseteq M$ und $N = M \trianglelefteq G$. Wegen $|N| = |G:H|$ gilt auch $|HN| = |H||N| = |G|$ und $G = HN$. □

Definition 5.9. In der Situation von Satz 5.8 nennt man N den *Frobeniuskern* von G.

Bemerkung 5.10.

(i) Man kennt keinen Beweis von Satz 5.8, der ohne Charaktertheorie auskommt.

(ii) Thompson hat gezeigt, dass der Frobeniuskern N stets nilpotent ist, d. h. N ist das direkte Produkt seiner Sylowgruppen.

Satz 5.11. *Sei G eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern N. Dann ist*

$$\mathrm{Irr}(G) = \mathrm{Irr}(G/N) \cup \{\psi^G : 1_N \neq \psi \in \mathrm{Irr}(N)\}.$$

Beweis. Sei H ein Frobeniuskomplement von G. Dann operiert H auf $\mathrm{Cl}(N)$ durch ${}^hC := \{hxh^{-1} : x \in C\}$. Man zeigt auch leicht, dass H auf $\mathrm{Irr}(N)$ durch Konjugation operiert. Dabei gilt ${}^h\psi({}^hC) = \psi(C)$ für $h \in H$, $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$ und $C \in \mathrm{Cl}(N)$. Wir zählen die Fixpunkte von $h \in H \setminus \{1\}$ auf $\mathrm{Cl}(N)$. Sei zunächst $hxh^{-1} = x \in N$. Dann ist $x^{-1}hx = h \in H \cap x^{-1}Hx$ und $x = 1$. Die Bahnen von $\langle h \rangle$ auf $N \setminus \{1\}$ haben daher die Länge $|\langle h \rangle|$. Ist $C \in \mathrm{Cl}(N) \setminus \{\{1\}\}$ ein Fixpunkt von $\langle h \rangle$, so folgt $|\langle h \rangle| \mid |C|$. Andererseits ist $|C| \mid |N|$. Dies widerspricht Aufgabe 16. Also ist $\{1\}$ der einzige Fixpunkt von $\langle h \rangle$ auf $\mathrm{Cl}(N)$. Nach Brauers Permutationslemma ist daher auch

$$\{\psi \in \mathrm{Irr}(N) : {}^h\psi = \psi\} = \{1_N\}$$

für alle $h \neq 1$. Sei $1_N \neq \psi \in \mathrm{Irr}(N)$. Dann ist $G_\psi = N$ und $\psi^G \in \mathrm{Irr}(G)$ nach Satz 4.13. Nach Satz 4.11 existiert ein $e \in \mathbb{N}$ mit $(\psi^G)_N = e \sum_{gN \in G/N} {}^g\psi$. Sind $\psi, \psi_1 \in \mathrm{Irr}(N)$ nicht konjugiert, so ist also $\psi^G \neq \psi_1^G$. Für ein $\chi \in \mathrm{Irr}(G/N)$ ist offenbar $\chi_N = \chi(1)1_N$ und somit $\chi \notin \{\psi^G : 1_N \neq \psi \in \mathrm{Irr}(N)\}$. Sei $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von $\mathrm{Irr}(N) \setminus \{1_N\}$ unter H. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G/N)} \chi(1)^2 + \sum_{\psi \in \mathcal{R}} \psi^G(1)^2 &= |G/N| + |G/N|^2 \sum_{\psi \in \mathcal{R}} \psi(1)^2 = |G/N| + |G/N| \sum_{h \in H} \sum_{\psi \in \mathcal{R}} ({}^h\psi)(1)^2 \\ &= |G/N| + |G/N| \sum_{1_N \neq \psi \in \mathrm{Irr}(N)} \psi(1)^2 = |G/N| + |G/N|(|N| - 1) = |G|.\end{aligned}$$

Also haben wir alle irreduziblen Charaktere von G gefunden. □

6 Induktionssätze

Bemerkung 6.1.

(i) Oft konstruiert man die Charaktertafel von G, indem man Charaktere von $H \leq G$ induziert. Wir werden in diesem Kapitel sehen, welche Untergruppen H man hierzu betrachten muss.

(ii) Für Untergruppen $H, K \leq G$ operiert $H \times K$ auf G durch ${}^{(h,k)}g = hgk^{-1}$ für $h \in H$, $k \in K$ und $g \in G$. Die Bahnen HgK heißen *Doppelnebenklassen*. Die Menge der Doppelnebenklassen bezeichnen wir mit $H\backslash G/K$.

Satz 6.2 (Mackey-Formel). *Sei $H, K \leq G$ und $\varphi \in \mathrm{CF}(H)$. Dann ist*

$$(\varphi^G)_K = \sum_{KgH \in K\backslash G/H} \left(({}^g\varphi)_{K \cap gHg^{-1}}\right)^K.$$

Beweis. Sei R ein Repräsentantensystem für $K\backslash G/H$ und für $r \in R$ sei S_r ein Repräsentantensystem für $K/K \cap rHr^{-1}$. Für jedes $k \in K$ existieren $s \in S_r$ und $x \in K \cap rHr^{-1}$ mit $k = sx$ und $krH = sxrH = sr(r^{-1}xr)H = srH$. Für $s, t \in S_r$ gilt

$$srK = trK \iff s(K \cap rHr^{-1}) = K \cap srHr^{-1} = K \cap trHr^{-1} = t(K \cap rHr^{-1}) \iff s = t.$$

Dies zeigt

$$G = \dot{\bigcup_{r \in R}} KrH = \dot{\bigcup_{r \in R}} \dot{\bigcup_{s \in S_r}} srH \qquad \text{(disjunkt)}.$$

Nach Bemerkung 4.4 gilt für $x \in K$:

$$\begin{aligned}(\varphi^G)(x) &= \sum_{\substack{gH \in G/H,\\ xgH = gH}} {}^g\varphi(x) = \sum_{r \in R} \sum_{\substack{s \in S_r,\\ xsrH = srH}} {}^{sr}\varphi(x)\\ &= \sum_{r \in R} \sum_{\substack{s \in S_r,\\ xs(rHr^{-1}) = s(rHr^{-1})}} {}^s({}^r\varphi)(x) = \sum_{r \in R} (({}^r\varphi)_{K \cap gHg^{-1}})^K(x).\end{aligned}$$ □

Definition 6.3.

(i) Eine Gruppe H heißt *(p-)quasielementar* für eine Primzahl p, falls H einen zyklischen Normalteiler N mit $p \nmid |N|$ besitzt, sodass H/N eine p-Gruppe ist (d. h. N ist ein p'-Hallnormalteiler).

(ii) Eine Gruppe H heißt *(p-)elementar* für eine Primzahl p, falls H ein direktes Produkt einer p-Sylowgruppe und einer zyklischen Gruppe ist. Offenbar sind elementare Gruppen auch quasielementar.

Lemma 6.4. *Zu jeder Primzahl p und jedem $x \in G$ existiert eine p-quasielementare Untergruppe $H \le G$ mit $p \nmid 1_H^G(x) \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir schreiben $\langle x \rangle = P \times Q$ mit $P \in \mathrm{Syl}_p(\langle x \rangle)$ und wählen $H/Q \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{N}_G(Q)/Q)$. Da Q zyklisch ist, ist H p-quasielementar. Für $g \in G$ mit $gxg^{-1} \in H$ ist auch $gQg^{-1} \subseteq H$. Somit ist $gQg^{-1} \subseteq \{y \in H : p \nmid |\langle y \rangle|\} = Q$ und $g \in \mathrm{N}_G(Q)$. Dies zeigt

$$\begin{aligned}1_H^G(x) &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G,\\ gxg^{-1} \in H}} 1 = \frac{1}{|H|} |\{g \in \mathrm{N}_G(Q) : gxg^{-1} \in H\}| = \frac{1}{|H|} |\{g \in \mathrm{N}_G(Q) : g^{-1}xg \in H\}|\\ &= |\{gH \in \mathrm{N}_G(Q)/H : xgH = gH\}|.\end{aligned}$$

Wir müssen also die Fixpunkte der Operation $\alpha : \langle x \rangle \to \mathrm{Sym}(\mathrm{N}_G(Q)/H)$ durch Linksmultiplikation zählen. Wegen $QgH = gQH = gH$ für $g \in \mathrm{N}_G(Q)$ ist $Q \le \mathrm{Ker}(\alpha)$. Da $xQ \in \langle x \rangle/Q \cong P$ ein p-Element ist, ist auch $\alpha(x)$ ein p-Element. Insbesondere zerfällt $\alpha(x)$ in Zyklen, deren Längen p-Potenzen sind. Dies liefert

$$1_H^G(x) = |\{gH \in \mathrm{N}_G(Q)/H : xgH = gH\}| \equiv |\mathrm{N}_G(Q)/H| \not\equiv 0 \pmod p.$$ □

Satz 6.5 (Solomon). *Es existieren $a_H \in \mathbb{Z}$ mit*

$$1_G = \sum_{\substack{H \le G,\\ H \text{ quasielementar}}} a_H 1_H^G.$$

Beweis. Sei
$$\mathcal{Q}(G) := \Big\{ \sum_{H \le G \text{ quasiel.}} a_H 1_H^G : a_H \in \mathbb{Z} \Big\}.$$
Für $x \in G$ sei $U_x := \{\lambda(x) : \lambda \in \mathcal{Q}(G)\}$. Wegen $-\lambda \in \mathcal{Q}(G)$ für $\lambda \in \mathcal{Q}(G)$ ist U_x eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$, d. h. $U_x = n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Nach Lemma 6.4 ist $U_x \nsubseteq p\mathbb{Z}$ für jede Primzahl p. Dies zeigt $U_x = \mathbb{Z}$. Wir wählen $\lambda_x \in \mathcal{Q}(G)$ mit $\lambda_x(x) = 1$ für $x \in G$. Für quasielementare Untergruppen $H, K \le G$ und $g \in G$ ist auch $H \cap gKg^{-1} \le H$ quasielementar (Aufgabe 17). Die Mackey-Formel zeigt also
$$1_H^G 1_K^G \overset{4.5\text{(ii)}}{=} (1_H (1_K^G)_H)^G = ((1_K^G)_H)^G = \Big(\sum_{HgK \in H\backslash G/K} ((1_{gKg^{-1}})_{H \cap gKg^{-1}})^H \Big)^G$$
$$\overset{4.5\text{(i)}}{=} \sum_{HgK \in H\backslash G/K} (1_{H \cap gKg^{-1}})^G \in \mathcal{Q}(G).$$
Insbesondere ist $\mathcal{Q}(G)$ abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Durch Ausmultiplizieren der Gleichung $\prod_{x \in G} (1_G - \lambda_x) = 0$ erhält man eine Darstellung für 1_G in der gewünschten Form. □

Lemma 6.6. *Sei H elementar und $\chi \in \operatorname{Irr}(H)$. Dann existieren $K \le H$ und $\lambda \in \operatorname{Irr}(K)$ mit $\lambda(1) = 1$ und $\lambda^H = \chi$.*

Beweis (Mann). Sei H ein minimales Gegenbeispiel. Wir schreiben $H = P \times Q$ mit $P \in \operatorname{Syl}_p(H)$. Nach Satz 2.5 ist $\chi = \psi\lambda$ mit $\psi \in \operatorname{Irr}(P)$ und $\lambda \in \operatorname{Irr}(Q)$. Im Fall $Q \ne 1$ existieren $P_1 \le P$, $\psi_1 \in \operatorname{Irr}(P_1)$ mit $\psi_1(1) = 1$ und $\psi = \psi_1^P$. Dann ist $\chi = \psi_1^P(1_P\lambda) = (\psi_1\lambda)^H$ mit $\psi_1\lambda \in \operatorname{Irr}(P_1 \times Q)$ nach Satz 4.5(ii). Da Q abelsch ist, gilt auch $(\psi_1\lambda)(1) = \psi_1(1)\lambda(1) = 1$. Dieser Widerspruch zeigt $Q = 1$, d. h. H ist eine p-Gruppe.

Für $\lambda \in \operatorname{Irr}(H)$ mit $\lambda(1) = 1$ ist $\chi\lambda \in \operatorname{Irr}(H)$ (Aufgabe 6). Im Fall $\chi\lambda = \chi$ ist $1 = (\chi, \chi\lambda)_H = (\chi\overline{\chi}, \lambda)_H$, d. h. λ ist ein irreduzibler Bestandteil von $\chi\overline{\chi}$ mit Vielfachheit 1. Schreibe $\chi\overline{\chi} = 1_H + \lambda_1 + \ldots + \lambda_r + \sum_{i=1}^s a_i\psi_i$ mit $\lambda_1(1) = \ldots = \lambda_r(1) = 1 < \psi_1(1) \le \ldots \le \psi_s(1)$. Dann ist
$$r + 1 \equiv r + 1 + \sum_{i=1}^s a_i\psi_i(1) = (\chi\overline{\chi})(1) = \chi(1)^2 \equiv 0 \pmod p$$
und $r \ne 0$. Sei also $1_H \ne \lambda \in \operatorname{Irr}(H)$ mit $\chi\lambda = \chi$. Für $x \in H \setminus \operatorname{Ker}(\lambda)$ ist dann $(1_H - \lambda)(x)\chi(x) = (\chi - \lambda\chi)(x) = 0$ und somit $\chi(x) = 0$. Wähle eine maximale Untergruppe $M < H$ mit $\operatorname{Ker}(\lambda) \subseteq M$. Wegen $H' \subseteq \operatorname{Ker}(\lambda)$ ist dann $M \trianglelefteq H$. Da H/M ein Element der Ordnung p enthält, folgt $|H : M| = p$ aus der Maximalität von M. Sei $\psi \in \operatorname{Irr}(M)$ mit $(\chi_M, \psi)_M \ne 0$. Im Fall $H_\psi = M$ ist $\psi^H = \chi$ nach Clifford. Wegen $M < H$ existieren $M_1 \le M$ und $\psi_1 \in \operatorname{Irr}(M_1)$ mit $\psi_1(1) = 1$ und $\psi_1^M = \psi$. Nach Satz 4.5(i) ist dann $\psi_1^H = (\psi_1^M)^H = \psi^H = \chi$. Dieser Widerspruch zeigt $H_\psi = H$. Also ist $\chi_M = e\psi$ für ein $e \in \mathbb{N}$ nach Satz 4.11. Wegen $\chi(1) = e\psi(1)$ ist e eine p-Potenz. Aus Satz 4.15 folgt nun $e = 1$, d. h. $\chi_M = \psi$. Nach Gallagher ist $\psi^H = \chi_1 + \ldots + \chi_p$ mit paarweise verschiedenen $\chi_i \in \operatorname{Irr}(H)$ und $\chi_1 = \chi$. Außerdem haben alle χ_i den gleichen Grad. Insbesondere ist $(\chi_i)_M = \psi$ für $i = 1, \ldots, p$. Da ψ^H und χ auf $H \setminus M$ $(\subseteq H \setminus \operatorname{Ker}(\lambda))$ verschwinden, verschwindet auch $\chi_2 + \ldots + \chi_p$ auf $H \setminus M$. Dies liefert den Widerspruch
$$0 = |H|(\chi_1, \chi_2 + \ldots + \chi_p)_H = \sum_{x \in M} \chi_1(x)\overline{(\chi_2 + \ldots + \chi_p)(x)} = |M|(p-1)(\psi, \psi)_M = |M|(p-1). \quad \square$$

Satz 6.7 (Brauers Induktionssatz). *Für jeden (virtuellen) Charakter χ von G existieren $a_{H,\psi} \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\chi = \sum_{\substack{H \le G,\\ H \text{ elementar}}} \sum_{\substack{\psi \in \mathrm{Irr}(H),\\ \psi(1)=1}} a_{H,\psi} \psi^G.$$

Beweis. Offenbar können wir annehmen, dass χ irreduzibel ist. Nach Lemma 6.6 können wir die Bedingung $\psi(1) = 1$ vernachlässigen. Hat man die gewünschte Darstellung für den Charakter 1_G gefunden, so erhält man durch Multiplikation mit χ eine entsprechende Darstellung für χ (beachte: $\chi\psi^G = (\chi_H \psi)^G$). Wir können daher $\chi = 1_G$ annehmen. Nach Solomon können wir auch annehmen, dass G p-quasielementar für eine Primzahl p ist. Sei G ein minimales Gegenbeispiel, und sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Dann besitzt P ein zyklisches, normales Komplement N in G.

Wir betrachten die elementare Untergruppe $H := P\,\mathrm{C}_N(P) \cong P \times \mathrm{C}_N(P)$. Da G nicht elementar ist, gilt $H < G$. Wegen $(1_H^G, 1_G)_G = (1_H, 1_H)_H = 1$ ist $\zeta := 1_H^G - 1_G$ ein Charakter von G. Ist jeder irreduzible Bestandteil von ζ aus einer echten Untergruppe induziert, so erhält man leicht eine gewünschte Darstellung für $1_G = 1_H^G - \zeta$ aus der Minimalität von G. Folglich existiert also ein $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $(\zeta, \psi)_G \ne 0$, sodass ψ nicht aus einer echten Untergruppe induziert ist. Für $g \in G$ ist $NgH = gNH = G$. Nach Mackey ist daher $1_N + \zeta_N = (1_H^G)_N = 1_{N\cap H}^N$. Dies zeigt $(1_N + \zeta_N, 1_N)_N = (1_{N\cap H}^N, 1_N)_N = (1_{N\cap H}, 1_{N\cap H})_{N\cap H} = 1$ und $(\psi_N, 1_N)_N \le (\zeta_N, 1_N)_N = 0$. Wir können daher $1_N \ne \lambda \in \mathrm{Irr}(N)$ mit $(\psi_N, \lambda)_N \ne 0$ wählen. Schreibe $N = \langle x \rangle$. Für $g \in G$ ist dann $gxg^{-1} = x^r$ für ein $r \in \mathbb{Z}$ wegen $N \trianglelefteq G$. Außerdem existiert ein $s \in \mathbb{Z}$ mit $N \cap H = \mathrm{C}_N(P) = \langle x^s \rangle$. Dann ist $gx^sg^{-1} = x^{sr} = (x^s)^r$. Dies zeigt $\mathrm{C}_N(P) \trianglelefteq G$. Für $a \in \mathrm{C}_N(P) \subseteq H$ ist daher

$$1_H^G(a) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G,\\ gag^{-1} \in H}} 1 = |G : H| = 1_H^G(1).$$

Also ist $\mathrm{C}_N(P) \subseteq \mathrm{Ker}(1_H^G) = \mathrm{Ker}(\zeta) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$ nach Aufgabe 9. Analog ist $\mathrm{C}_N(P) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi) \cap N = \mathrm{Ker}(\psi_N) \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda)$. Da ψ aus keiner echten Untergruppe induziert ist, folgt $G_\lambda = G$ nach Clifford. Insbesondere ist $\lambda(y^{-1}xy) = {}^y\lambda(x) = \lambda(x)$ für $y \in P$. Also ist $yxy^{-1} \in x\,\mathrm{Ker}(\lambda)$ (beachte: $\lambda(1) = 1$). Wie oben zeigt man $\mathrm{Ker}(\lambda) \trianglelefteq G$ (als Untergruppe des zyklischen Normalteilers N). Folglich operiert P auf der Nebenklasse $x\,\mathrm{Ker}(\lambda)$ durch Konjugation. Zählen der Bahnen liefert

$$|x\,\mathrm{Ker}(\lambda) \cap \mathrm{C}_N(P)| \equiv |x\,\mathrm{Ker}(\lambda)| = |\mathrm{Ker}(\lambda)| \not\equiv 0 \pmod p.$$

Dies zeigt $\varnothing \ne x\,\mathrm{Ker}(\lambda) \cap \mathrm{C}_N(P) \subseteq x\,\mathrm{Ker}(\lambda) \cap \mathrm{Ker}(\lambda)$ und $x \in \mathrm{Ker}(\lambda)$. Also ist $N = \langle x \rangle \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda)$ und $\lambda = 1_N$. Widerspruch. □

Satz 6.8. *Eine Klassenfunktion χ von G ist genau dann ein irreduzibler Charakter, falls folgende Bedingungen gelten:*

(i) *Für jede elementare Untergruppe $H \le G$ ist χ_H ein virtueller Charakter.*

(ii) $(\chi, \chi)_G = 1$.

(iii) $\chi(1) > 0$.

Beweis. Für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ gelten offenbar (i)–(iii). Sei nun umgekehrt $\chi \in \mathrm{CF}(G)$, sodass (i)–(iii) gilt. Nach Satz 6.7 existieren $a_{H,\psi} \in \mathbb{Z}$ mit

$$1_G = \sum_{\substack{H \le G,\\ H \text{ elementar}}} \sum_{\psi \in \mathrm{Irr}(H)} a_{H,\psi} \psi^G. \tag{$*$}$$

Nach Voraussetzung sind $\psi\chi_H$ und $\psi^G\chi = (\psi\chi_H)^G$ für $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$ virtuelle Charaktere. Multipliziert man nun $(*)$ mit χ, so sieht man, dass χ ein virtueller Charakter von G ist. Also existieren $a_\varphi \in \mathbb{Z}$ mit $\chi = \sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(G)} a_\varphi\varphi$. Wegen $1 = (\chi,\chi)_G = \sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(G)} a_\varphi^2$ ist $\pm\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Aus $\chi(1) > 0$ folgt schließlich $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. $\square$

Satz 6.9 (Artin). *Für jeden Charakter χ von G existieren $a_{C,\psi} \in \mathbb{Q}$ mit*

$$\chi = \sum_{\substack{C\le G,\\ C \text{ zyklisch}}} \sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(C)} a_{C,\psi}\psi^G.$$

Beweis. Wie in Satz 6.7 können wir $\chi = 1_G$ annehmen. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf G durch

$$x \approx y :\Longleftrightarrow \exists g \in G : \langle x\rangle = g\langle y\rangle g^{-1}.$$

Für eine Äquivalenzklasse K von $\approx$ genügt es zu zeigen, dass die charakteristische Funktion

$$\chi_K(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in K,\\ 0 & \text{falls } x \notin K \end{cases}$$

die gewünschte Form hat, denn χ ist die Summe aller χ_K.

Sei $x \in K$ fest. Wir argumentieren durch Induktion nach $n := |\langle x\rangle|$. Für $n = 1$ ist $K = \{1\}$ und $\chi_K = |G|^{-1}1_1^G$ (siehe Beispiel 4.8). Sei also $n > 1$. Für $C := \langle x\rangle$ und $y \in G$ ist

$$1_C^G(y) = |\{gC \in G/C : g^{-1}yg \in C\}|$$

nach Bemerkung 4.4. Sei $z \in G$ mit $\langle z\rangle = \langle y\rangle$. Dann ist

$$g^{-1}yg \in C \Longleftrightarrow g^{-1}\langle y\rangle g \le C \Longleftrightarrow g^{-1}\langle z\rangle g \le C \Longleftrightarrow g^{-1}zg \in C$$

für $g \in G$ und daher $1_C^G(z) = 1_C^G(y)$. Da 1_C^G auch eine Klassenfunktion ist, ist 1_C^G sogar konstant auf den $\approx$-Klassen. Wir wählen $a \in \mathbb{Q}$ mit $a1_C^G(x) = 1$. Liegt kein Konjugiertes von y in C, so ist offenbar $1_C^G(y) = 0$. Sei nun $\langle y\rangle < C$ und sei K_y die $\approx$-Klasse von y. Nach Induktion lässt sich χ_{K_y} in der gewünschten Form schreiben. Somit lässt sich auch $-a1_C^G\chi_{K_y}$ in der gewünschten Form schreiben. Summiert man über diese Funktionen, so ergibt sich, dass auch

$$\beta(y) := \begin{cases} -a1_C^G(y) & \text{falls } \langle y\rangle < gCg^{-1} \text{ für ein } g \in G,\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die gewünschte Form hat. Schließlich hat auch $\chi_K = a1_C^G + \beta$ die gewünschte Form. $\square$

Bemerkung 6.10.

(i) Im Folgenden beschäftigen wir uns mit *K-Darstellungen*, d. h. Homomorphismen $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n,K)$, wobei K ein beliebiger Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist.

(ii) Man sieht leicht, dass der Satz von Maschke auch für K-Darstellungen gilt (im Beweis benötigt man nur $\mathrm{char}(K) \nmid |G|$). Jede K-Darstellung lässt sich also als direkte Summe irreduzibler K-Darstellungen schreiben. Entsprechendes gilt für die K-Charaktere.

(iii) Genauso gilt folgende Form von Schurs Lemma: Sind Δ und Γ nicht-ähnliche irreduzible K-Darstellungen und $A\Delta(g) = \Gamma(g)A$ für alle $g \in G$, so ist $A = 0$ (die vollständige Version von Schurs Lemma benötigt, dass K algebraisch abgeschlossen ist).

(iv) Damit bleibt auch Teil (i) von Lemma 1.18 richtig für K-Darstellungen. Für verschiedene irreduzible K-Charaktere χ und ψ gilt also $(\chi,\psi)_G = 0$ (siehe Beweis von Satz 1.19). Außerdem ist $(\chi,\chi)_G > 0$, aber nicht unbedingt $(\chi,\chi)_G = 1$ (Aufgabe 19).

Definition 6.11. Man nennt $\exp(G) := \min\{n \in \mathbb{N} : g^n = 1 \ \forall g \in G\}$ den *Exponenten* von G.

Bemerkung 6.12. Division mit Rest liefert Zahlen $a, r \in \mathbb{Z}$ mit $|G| = a\exp(G) + r$ und $0 \le r < \exp(G)$. Dann ist $g^r = g^{a\exp(G)+r} = g^{|G|} = 1$ für alle $g \in G$ nach Lagrange. Dies zeigt $r = 0$ und $\exp(G) \mid |G|$.

Satz 6.13 (Brauer). *Sei $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ eine Matrixdarstellung und sei $\zeta := e^{2\pi i/\exp(G)}$. Dann lässt sich Δ über $\mathbb{Q}(\zeta)$ realisieren, d. h. durch geeignete Basiswahl kann man $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}(\zeta))$ annehmen.*

Beweis. Sei χ der Charakter von Δ. Sei $K := \mathbb{Q}(\zeta)$. Nach Brauers Induktionssatz existieren elementare Untergruppen $H_1,\ldots,H_m$ und $\lambda_i \in \mathrm{Irr}(H_i)$ mit $\lambda_i(1) = 1$ und

$$\chi = \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda_i^G$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{Z}$. Wegen $\lambda_i(1) = 1$ ist $\lambda_i(h)^{\exp(G)} = \lambda_i(h^{\exp(G)}) = \lambda_i(1) = 1$ für $h \in H_i$. Daher lässt sich λ_i über K realisieren. Nach Aufgabe 14 lässt sich daher auch λ_i^G über K realisieren. Wir schreiben

$$\lambda_i^G = \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\tau_j,$$

wobei $\tau_1,\ldots,\tau_k$ die irreduziblen K-Charaktere von G sind. Dann ist

$$\chi = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} a_i b_{ij}\tau_j.$$

Nach Bemerkung 6.10 gilt $(\tau_j,\tau_j)_G \sum_{i=1}^m a_i b_{ij} = (\chi,\tau_j)_G \ge 0$ für $j = 1,\ldots,k$, denn τ_j ist offenbar auch ein Charakter (über $\mathbb{C}$). Also ist $\sum_{i=1}^m a_i b_{ij} \ge 0$, und χ ist ein K-Charakter. Es existiert also eine K-Darstellung Γ mit Charakter χ. Nach Satz 1.21 sind Δ und Γ ähnlich. Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 6.14.

(i) Die Charaktere zyklischer Gruppen kann man über keinen kleineren Körper als in Satz 6.13 realisieren.

(ii) Satz 6.13 ermöglicht es, Darstellungen auf dem Computer zu realisieren, denn jedes Element in $\mathbb{Q}(\zeta)$ lässt sich eindeutig in der Form $a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_k\zeta^k$ mit $k := \varphi(\exp(G)) - 1$ und $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{Q}$ schreiben.

Beispiel 6.15. Sei Δ eine Matrixdarstellung mit Charakter χ. Nach Satz 6.13 können wir $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}(\zeta))$ mit $\zeta := e^{2\pi i/|G|}$ annehmen. Sei $\alpha \in \mathcal{G} := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q})$. Offenbar induziert α dann einen Automorphismus auf $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}(\zeta))$ durch $\alpha((x_{ij})_{i,j=1}^n) = (\alpha(x_{ij}))_{i,j=1}^n$. Folglich ist auch ${}^\alpha\Delta := \alpha\circ\Delta : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}(\zeta))$, $g \mapsto \alpha(\Delta(g))$ eine Matrixdarstellung von G. Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha(\zeta) = \zeta^m$. Für den Charakter ${}^\alpha\chi$ von ${}^\alpha\Delta$ gilt dann ${}^\alpha\chi(g) = \mathrm{Spur}\,\alpha(\Delta(g)) = \alpha(\chi(g)) = \chi(g^m)$ für $g \in G$ (siehe Beweis von Lemma 2.12 und Aufgabe 5). Umgekehrt weiß man aus Algebra 1, dass für jedes $m \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(m, |G|) = 1$ ein $\alpha \in \mathcal{G}$ mit $\alpha(\zeta) = \zeta^m$ existiert ($\mathcal{G} \cong (\mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z})^\times$). In diesem Fall ist also stets $g \mapsto \chi(g^m)$ ein Charakter von G. Für $m = -1$ erhält man ${}^\alpha\chi = \overline{\chi}$. Für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ist auch ${}^\alpha\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, denn

$$({}^\alpha\chi, {}^\alpha\chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(\chi(g))\alpha(\chi(g^{-1})) = \alpha((\chi, \chi)_G) = \alpha(1) = 1.$$

Gilt $\chi(g) \notin \mathbb{Z}$ für ein $g \in G$, so existiert stets ein $\alpha \in \mathcal{G}$ mit ${}^\alpha\chi \neq \chi$, denn $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ ist eine Galois-Erweiterung. Man nennt χ und ${}^\alpha\chi$ *algebraisch konjugiert*. Auf diese Weise kann man häufig Charaktere konstruieren.

Bemerkung 6.16. Eine Gruppe H heißt *M-Gruppe*, falls jeder irreduzible Charakter von H die Induktion eines Charakters vom Grad 1 ist (d. h. jeder irreduzible Charakter ist *monomial*). Nach Lemma 6.6 sind elementare Gruppen M-Gruppen. Wir werden umgekehrt zeigen, dass jede M-Gruppe auflösbar ist.

Lemma 6.17. *Sei ψ ein Charakter von $H \leq G$. Dann ist*

$$\mathrm{Ker}(\psi^G) = \bigcap_{g \in G} g \,\mathrm{Ker}(\psi) g^{-1}.$$

Beweis. Es gilt

$$x \in \mathrm{Ker}(\psi^G) \iff \psi^G(x) = \psi^G(1) = |G : H|\psi(1) \iff \sum_{\substack{g \in G,\\ gxg^{-1} \in H}} \psi(gxg^{-1}) = |G|\psi(1).$$

Für $x \in \mathrm{Ker}(\psi^G)$ ist also

$$|G|\psi(1) = \Bigg| \sum_{\substack{g \in G,\\ gxg^{-1} \in H}} \psi(gxg^{-1}) \Bigg| \leq \sum_{\substack{g \in G,\\ gxg^{-1} \in H}} |\psi(gxg^{-1})| \leq |G|\psi(1)$$

nach Lemma 2.12. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (vgl. Beweis von Lemma 2.12) impliziert $gxg^{-1} \in H$ und $\psi(gxg^{-1}) = \psi(x)$ für alle $g \in G$. Also ist

$$|G|\psi(1) = \sum_{g \in G} \psi(gxg^{-1}) = |G|\psi(x)$$

und $\psi(gxg^{-1}) = \psi(1)$ für alle $g \in G$. Dies zeigt

$$x \in \mathrm{Ker}(\psi^G) \iff \forall g \in G : gxg^{-1} \in \mathrm{Ker}(\psi) \iff x \in \bigcap_{g \in G} g \,\mathrm{Ker}(\psi) g^{-1}. \qquad \square$$

Definition 6.18. Wir definieren $G^{(1)} := G'$ und $G^{(i)} := (G^{(i-1)})'$ für $i \geq 2$.

Bemerkung 6.19.

(i) Bekanntlich ist $G^{(1)} = G' \trianglelefteq G$. Nehmen wir induktiv an, dass $G^{(i-1)} \trianglelefteq G$ gilt. Sei $g \in G$. Dann ist die Abbildung $G^{(i-1)} \to G^{(i-1)}$, $x \mapsto gxg^{-1}$ ein Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(G^{(i-1)})$. Nach Bemerkung 2.9 ist also $gG^{(i)}g^{-1} = \alpha((G^{(i-1)})') = (G^{(i-1)})' = G^{(i)}$. Also sind alle $G^{(i)}$ normal in G.

(ii) Bekanntlich ist G genau dann auflösbar, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $G^{(k)} = 1$ gibt.

Satz 6.20 (Taketa). *Jede endliche M-Gruppe ist auflösbar.*

Beweis. Sei G eine M-Gruppe. Seien $1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$ die Grade der irreduziblen Charaktere von G (ohne Vielfachheiten). Wir zeigen zunächst $G^{(i)} \subseteq \mathrm{Ker}(\chi)$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\chi(1) = \alpha_i$. Für $i = 1$ hat χ Grad 1 und es gilt $G^{(1)} = G' \subseteq \mathrm{Ker}(\chi)$. Sei nun $i > 1$. Wir argumentieren durch Induktion nach i. Nach Voraussetzung existieren $H < G$ und $\lambda \in \mathrm{Irr}(H)$ mit $\lambda(1) = 1$ und $\chi = \lambda^G$. Wegen $H < G$ und $(1_H^G, 1_G)_G = (1_H, 1_H)_H = 1$ ist 1_H^G reduzibel. Für jeden irreduziblen Bestandteil ψ von 1_H^G gilt also $\psi(1) < 1_H^G(1) = |G : H| = \lambda^G(1) = \chi(1)$. Nach Induktion ist also $G^{(i-1)} \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$. Nach Aufgabe 9 und Lemma 6.17 ist damit auch $G^{(i-1)} \subseteq \mathrm{Ker}(1_H^G) \subseteq H$. Es folgt $G^{(i)} = (G^{(i-1)})' \subseteq H' \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda)$. Wegen $G^{(i)} \trianglelefteq G$ zeigt Lemma 6.17 auch

$$G^{(i)} \subseteq \bigcap_{g \in G} g \,\mathrm{Ker}(\lambda) g^{-1} = \mathrm{Ker}(\chi).$$

Insbesondere gilt

$$G^{(k)} \subseteq \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{Ker}(\chi) = 1$$

nach Aufgabe 9, d. h. G ist auflösbar. □

Bemerkung 6.21. Nicht jede auflösbare Gruppe ist auch eine M-Gruppe (siehe Aufgabe 20).

7 Frobenius-Schur-Indikatoren

Bemerkung 7.1. Wir beschäftigen uns mit der Frage, wie viele „Wurzeln" ein Element $g \in G$ hat.

Definition 7.2. Für $n \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ sei

$$\theta_n(g) := |\{h \in G : h^n = g\}|.$$

Bemerkung 7.3.

(i) Im Fall $\mathrm{ggT}(n, |G|) = 1$ gilt $\theta_n(g) = 1$ für alle $g \in G$, denn die Abbildung $G \to G$, $g \mapsto g^n$ ist eine Bijektion.

(ii) Offenbar ist θ_n eine Klassenfunktion, d. h. wir können

$$\theta_n = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \nu_n(\chi)\chi$$

mit $\nu_n(\chi) \in \mathbb{C}$ schreiben.

Lemma 7.4. *Für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\nu_n(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^n).$$

Beweis. Es gilt

$$\nu_n(\chi) = (\chi, \theta_n)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\theta_n(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{\substack{h\in G,\\ h^n=g}}\chi(h^n) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\sum_{\substack{g\in G,\\ h^n=g}}\chi(h^n) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\chi(h^n). \square$$

Definition 7.5. Man nennt $\nu_2(\chi)$ den *Frobenius-Schur-Indikator* von $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Satz 7.6. *Für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ gilt:*

$$\nu_2(\chi) = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } \overline{\chi} = \chi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $g \mapsto (\gamma_{ij}(g))_{i,j=1}^n$ eine Matrixdarstellung mit Charakter χ. Wir betrachten die Darstellung $\Delta^2 := \Delta \otimes \Delta : G \to \mathrm{GL}(n^2, \mathbb{C})$ (siehe Bemerkung 2.2 und Bemerkung 2.4). Wie dort sei $i \mapsto (i_1, i_2)$ eine Bijektion zwischen $\{1, \ldots, n^2\}$ und $\{1, \ldots, n\}^2$. Man sieht leicht, dass

$$U := \{(a_1, \ldots, a_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2} : a_i = -a_j \text{ falls } (i_1, i_2) = (j_2, j_1)\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n^2}$ ist. Für $(a_1, \ldots, a_{n^2}) \in U$ und $g \in G$ ist

$$(\Delta^2(g))(a_1, \ldots, a_{n^2}) = \Bigl(\sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{i_1 j_1}(g)\gamma_{i_2 j_2}(g)\Bigr)_{i=1}^{n^2}.$$

Sei $k \in \{1, \ldots, n^2\}$ mit $(k_1, k_2) = (i_2, i_1)$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{i_1 j_1}(g)\gamma_{i_2 j_2}(g) = -\sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{i_1 j_2}(g)\gamma_{i_2 j_1}(g) = -\sum_{j=1}^{n^2} a_j \gamma_{k_1 j_1}(g)\gamma_{k_2 j_2}(g).$$

Also ist $(\Delta^2(g))(a_1, \ldots, a_{n^2}) \in U$ und U ist Δ^2-invariant. Nach Maschke existiert ein Δ^2-invariantes Komplement $V \leq \mathbb{C}^{n^2}$ von U. Seien $\Lambda^2 : G \to \mathrm{GL}(U)$ und $S^2 : G \to \mathrm{GL}(V)$ die entsprechenden Teildarstellungen (also $\Delta^2 = \Lambda^2 \oplus S^2$). O. B. d. A. sei $i_1 < i_2$ für $i = 1, \ldots, n(n-1)/2$. Wir wählen $i' \in \{1, \ldots, n^2\}$ mit $(i'_1, i'_2) = (i_2, i_1)$. Dann ist $\{b_i := e_i - e_{i'} : i = 1, \ldots, n(n-1)/2\}$ eine Basis von U, wobei e_i die Standardbasis von $\mathbb{C}^{n^2}$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}(\Lambda^2(g))(b_i) = (\Delta^2(g))(b_i) &= \bigl(\gamma_{j_1 i_1}(g)\gamma_{j_2 i_2}(g) - \gamma_{j_1 i_2}(g)\gamma_{j_2 i_1}(g)\bigr)_{j=1}^{n^2} \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \bigl(\gamma_{j_1 i_1}(g)\gamma_{j_2 i_2}(g) - \gamma_{j_1 i_2}(g)\gamma_{j_2 i_1}(g)\bigr) b_j\end{aligned}$$

für $g \in G$ und $i = 1, \ldots, n(n-1)/2$. Für den Charakter λ von Λ^2 gilt also

$$\begin{aligned}\lambda(g) &= \sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \gamma_{i_1 i_1}(g)\gamma_{i_2 i_2}(g) - \gamma_{i_1 i_2}(g)\gamma_{i_2 i_1}(g) = \frac{1}{2}\Bigl(\sum_{i=1}^n \gamma_{ii}(g)\Bigr)^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\Bigl(\sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij}(g)\gamma_{ji}(g)\Bigr)}_{\substack{=\mathrm{Spur}\,\Delta(g)^2 \\ =\mathrm{Spur}\,\Delta(g^2)}} \\ &= \frac{1}{2}\bigl(\chi(g)^2 - \chi(g^2)\bigr)\end{aligned}$$

für $g \in G$. Da λ ein Summand von χ^2 ist ($\Delta^2 = \Lambda^2 \oplus S^2$), gilt $0 \le (\lambda, 1_G)_G \le (\chi^2, 1_G)_G = (\chi, \overline{\chi})_G \le 1$. Nach Lemma 7.4 ist also

$$\nu_2(\chi) = (\chi^2 - 2\lambda, 1_G)_G = (\chi^2, 1_G)_G - 2(\lambda, 1_G)_G = (\chi, \overline{\chi})_G - 2(\lambda, 1_G)_G = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } \overline{\chi} = \chi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \square$$

Bemerkung 7.7.

(i) Die im Beweis konstruierte Darstellung Λ^2 (bzw. S^2) nennt man das *alternierende* (bzw. *symmetrische*) *Quadrat* von Δ.

(ii) Es gilt $\nu_2(\chi) = 1$ genau dann, wenn eine $\mathbb{R}$-Darstellung mit Charakter χ existiert (ohne Beweis).

Definition 7.8. Ein Element der Ordnung 2 in G heißt *Involution*.

Satz 7.9. *Die Anzahl der Involutionen in G ist*

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \nu_2(\chi)\chi(1) - 1 = \sum_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}(G), \\ \overline{\chi} = \chi \ne 1_G}} \nu_2(\chi)\chi(1).$$

Beweis. Dies folgt aus $|\{x \in G : x^2 = 1\}| = \theta_2(1)$. $\square$

Lemma 7.10. *Sei $t > 0$ die Anzahl der Involutionen in G. Dann existiert ein $x \in G \setminus \{1\}$ mit $|G : \mathrm{C}_G(x)| \le (|G|/t)^2$.*

Beweis. Sei $S := \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) : 1_G \ne \chi = \overline{\chi}\}$. Nach Satz 7.9 ist $0 < t \le \sum_{\chi \in S} \chi(1)$. Insbesondere ist $S \ne \varnothing$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$t^2 \le \Big(\sum_{\chi \in S} \chi(1)\Big)^2 \le \sum_{\chi \in S} 1^2 \sum_{\chi \in S} \chi(1)^2 = |S| \sum_{\chi \in S} \chi(1)^2 \le |S||G| \le (k(G) - 1)|G|.$$

Hätte jede nichttriviale Konjugationsklasse von G mehr als $(|G|/t)^2$ Elemente, so wäre

$$|G| - 1 > (k(G) - 1)\frac{|G|^2}{t^2} \ge |G|. \qquad \square$$

Satz 7.11 (Brauer-Fowler)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren nur endlich viele einfache Gruppen G mit einer Involution x, sodass $|\mathrm{C}_G(x)| \le n$ gilt.*

Beweis. Ist G abelsch, so ist $|G| = |\mathrm{C}_G(x)| \le n$ und die Behauptung ist klar. Sei also G nichtabelsch. Die Konjugationsklasse von x in G enthält $|G : \mathrm{C}_G(x)| \ge |G|/n$ Elemente. Dies ist also eine untere Schranke für die Anzahl der Involutionen in G. Nach Lemma 7.10 existiert ein $y \in G \setminus \{1\}$ mit $|G : \mathrm{C}_G(y)| \le (|G|/(|G|/n))^2 = n^2$. Da G einfach und nichtabelsch ist, gilt auch $\mathrm{C}_G(y) < G$. Wie üblich operiert G transitiv (und damit nicht-trivial) auf $G/\mathrm{C}_G(y)$ durch Linksmultiplikation (d. h. ${}^g(h\,\mathrm{C}_G(y)) := gh\,\mathrm{C}_G(y)$). Der entsprechende Homomorphismus $\alpha : G \to \mathrm{Sym}(G/\mathrm{C}_G(y))$ ist dann ebenfalls nicht-trivial. Da G einfach ist, folgt $\mathrm{Ker}(\alpha) = 1$. Insbesondere ist $|G| \le |\mathrm{Sym}(G/\mathrm{C}_G(y))| \le n^2!$. Die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 7.12. Nach Feit-Thompson („Gruppen ungerader Ordnung sind auflösbar“) besitzt jede einfache, nichtabelsche Gruppe eine Involution. Der Satz von Brauer-Fowler war die Grundidee der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen.

Lemma 7.13. *Sei p^n eine Primzahlpotenz. Die Summe der primitiven p^n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ ist 1 falls $n = 0$, -1 falls $n = 1$ oder 0 falls $n \geq 2$.*

Beweis. Wir können $n \geq 1$ annehmen. Für $\zeta := e^{2\pi i/p^n} \in \mathbb{C}$ ist dann $\sum_{i=0}^{p^n-1} \zeta^i = \frac{\zeta^{p^n}-1}{\zeta-1} = 0$. Für $n = 1$ ist die Summe der primitiven Einheitswurzeln $\sum_{i=1}^{p-1} \zeta^i = -1$. Für $n \geq 2$ ergibt sich

$$\sum_{\substack{0<i<p^n \\ \mathrm{ggT}(i,p)=1}} \zeta^i = \sum_{i=0}^{p^n-1} \zeta^i - \sum_{i=0}^{p^{n-1}-1} \zeta^{pi} = 0.$$ □

Satz 7.14 (Frobenius)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ gilt*

$$\frac{1}{\mathrm{ggT}(n, |G|)} \sum_{\substack{g \in G, \\ g^n=1}} \chi(g) \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{ggT}(n, |G|) \mid \theta_n(1)$.

Beweis. Sei ρ der reguläre Charakter von G. Wir zeigen zunächst, dass $\tau(g) := \rho(g^n)/\mathrm{ggT}(n, |G|)$ für $g \in G$ ein virtueller Charakter von G ist. Nach Brauer (siehe Beweis von Satz 6.8) genügt es zu zeigen, dass τ_E für jede elementare Untergruppe $E \leq G$ virtuell ist. Sei ρ_1 der reguläre Charakter von E. Für $g \in E$ ist dann

$$\tau_E(g) = \frac{\rho(g^n)}{\mathrm{ggT}(n, |G|)} = \underbrace{\frac{|G : E| \,\mathrm{ggT}(n, |E|)}{\mathrm{ggT}(n, |G|)}}_{\in \mathbb{N}} \frac{\rho_1(g^n)}{\mathrm{ggT}(n, |E|)}.$$

Wir können also $G = E$ annehmen. Dann ist G das direkte Produkt seiner Sylowgruppen $G = P_1 \times \ldots \times P_s$. Sei ρ_i der reguläre Charakter von P_i. Für $g = x_1 \ldots x_s \in G$ $(x_i \in P_i)$ gilt dann

$$\tau(G) = \frac{\rho_1(x_1^n)}{\mathrm{ggT}(n, |P_1|)} \cdots \frac{\rho_s(x_s^n)}{\mathrm{ggT}(n, |P_s|)}.$$

Durch Induktion nach s können wir annehmen, dass G eine p-Gruppe ist. Sei $\mathrm{ggT}(n, |G|) = p^a$. Im Fall $p^{a+1} \mid n$ ist $|G| = p^a$ und $\tau(g) = \rho(1)/|G| = 1_G(g)$. Wir können also $n = p^a m$ mit $p \nmid m$ annehmen. Sei $\tau'(g) := \rho(g^{p^a})/p^a$ für $g \in G$. Wenn wir zeigen können, dass τ' ein virtueller Charakter von G ist, so gilt dies auch für τ, denn $\tau(g) = \tau'(g^m)$ für $g \in G$ (siehe Beispiel 6.15). Wir können also $n = p^a$ annehmen. Für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ müssen wir zeigen: $(\chi, \tau)_G \in \mathbb{Z}$. Nach Lemma 6.6 existieren $H \leq G$ und $\varphi \in \mathrm{Irr}(H)$ mit $\varphi(1) = 1$ und $\chi = \varphi^G$. Somit genügt zu zeigen:

$$(\chi, \tau)_G = (\varphi, \tau_H)_H = \frac{|G : H|}{p^a} \sum_{\substack{h \in H, \\ h^{p^a}=1}} \varphi(h) \in \mathbb{Z}.$$

Sei $x \in H$ mit $|\langle x \rangle| = p^b > p^a$, und sei $\varphi(x)$ eine primitive p^c-te Einheitswurzel. Nach Lemma 7.13 ist

$$\sum_{\substack{h \in H, \\ \langle h \rangle = \langle x \rangle}} \varphi(h) = \left\{ \begin{matrix} p^{b-1}(p-1) & \text{falls } c = 0, \\ -p^{b-1} & \text{falls } c = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix} \right\} \equiv 0 \pmod{p^a}.$$

Da $x \sim y :\Leftrightarrow \langle x\rangle = \langle y\rangle$ eine Äquivalenzrelation auf H ist, gilt folgende Kongruenz:

$$|G:H|\sum_{\substack{h\in H,\\ h^{p^a}=1}}\varphi(h) \equiv |G:H|\Bigg(\sum_{\substack{h\in H,\\ h^{p^a}=1}}\varphi(h)+\sum_{\substack{h\in H,\\ h^{p^a}\neq 1}}\varphi(h)\Bigg) = |G|(\varphi,1_H)_H \equiv 0 \pmod{p^a}.$$

Damit ist schließlich gezeigt, dass τ für jede endliche Gruppe G ein virtueller Charakter ist. Wegen $(\chi,\tau)_G \in \mathbb{Z}$ für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung erhält man durch $\chi = 1_G$. □

Bemerkung 7.15.

(i) Ein ähnlicher Beweis zeigt $\mathrm{ggT}(n, |\mathrm{C}_G(g)|) \mid \theta_n(g)$ für $g \in G$.

(ii) Mit der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen konnte man folgende Vermutung von Frobenius beweisen:

$$\theta_n(1) = n \;\Big|\; |G| \Longrightarrow \{g\in G : g^n = 1\} \trianglelefteq G.$$

8 Normale Komplemente

Definition 8.1. Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen und $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Wir setzen $\pi' := \mathbb{P}\setminus\pi$. Ein Element $x \in G$ heißt *π-Element*, falls jeder Primteiler von $|\langle x\rangle|$ in π liegt. Analog ist G eine *π-Gruppe*, falls jeder Primteiler von $|G|$ in π liegt.

Bemerkung 8.2.

(i) Nach Lagrange und Cauchy ist G genau dann eine π-Gruppe, wenn jedes Element in G ein π-Element ist.

(ii) Sei $x \in G$. Bekanntlich besitzt $\langle x\rangle$ für jede Primzahl p genau eine (normale) p-Sylowgruppe S_p. Insbesondere ist $\langle x\rangle = \prod_{p\in\mathbb{P}} S_p$. Folglich existieren eindeutig bestimmte $x_p \in S_p$ mit $x = \prod_{p\in\mathbb{P}} x_p$. Man nennt x_p den *p-Faktor* von x. Für $\pi\subseteq\mathbb{P}$ sei $x_\pi := \prod_{p\in\pi} x_p$. Dann ist x_π der *π-Faktor* von x. Offenbar ist $x = x_\pi x_{\pi'}$.

Satz 8.3 (Brauer-Dade)**.** *Sei $N \trianglelefteq H \leq G$ und $\pi\subseteq\mathbb{P}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) H/N ist eine π-Gruppe.

(ii) $|G:H|$ ist durch keine Primzahl in π teilbar.

(iii) Sind $x, y \in H$ konjugiert in G, so sind xN, yN konjugiert in H/N.

(iv) Ist h ein π-Element in $H\setminus N$ und $P \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{C}_G(h))$ für eine Primzahl $p\in\pi$ mit $p \nmid |\langle h\rangle|$, so ist $\langle h\rangle P$ zu einer Untergruppe von H konjugiert.

Dann existiert ein Normalteiler $M \trianglelefteq G$ mit $G = HM$ und $H\cap M = N$.

Bemerkung 8.4. Hat man die Existenz von M bereits bewiesen, so kann man $\mathrm{Irr}(G/M)$ aus $\mathrm{Irr}(H/N)$ und dem Isomorphismus $G/M = HM/M \cong H/H\cap M = H/N$ konstruieren. Im Beweis von Satz 8.3 geht man umgekehrt vor und konstruiert zunächst die Inflation der Charaktere in $\mathrm{Irr}(G/M)$ und erhält M als Durchschnitt der Kerne dieser Charaktere (vgl. Beweis von Satz 5.8).

Beweis. Sei $\mathrm{Cl}(H/N) = \{C_1, \ldots, C_k\}$ und $C_1 = \{1\}$. Für $i = 1, \ldots, k$ sei

$$B_i := \{h \in H : hN \in C_i\},$$

also $B_1 = N$ und $H = \bigcup_{i=1}^k B_i$. Für $i = 2, \ldots, k$ sei

$$A_i := \{g \in G : g_\pi \text{ ist konjugiert zu einem Element in } B_i\}.$$

Mit $A_1 := G \setminus \bigcup_{i=2}^k A_i$ ist also $G = \bigcup_{i=1}^k A_i$.

Für $i = 1, \ldots, k$ ist A_i eine Vereinigung von Konjugationsklassen in G.

Behauptung 1: $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^k A_i$.
Beweis: Sei $g \in A_i \cap A_j$ und o. B. d. A. $i \neq 1 \neq j$, dann ist g_π zu einem Element $h_i \in B_i$ und einem Element $h_j \in B_j$ konjugiert. Folglich existiert ein $x \in G$ mit $xh_ix^{-1} = h_j$. Wegen (iii) sind dann h_iN und h_jN in H/N konjugiert, d. h. $i = j$.

Behauptung 2: $A_i \cap H = B_i$.
Beweis: Sei zunächst $i \geq 2$ und $h = h_\pi h_{\pi'} \in B_i$. Dann ist $h_{\pi'} \in N$ nach (i), also $hN = h_\pi N$ und damit $h_\pi \in B_i$ und $h \in A_i \cap H$. Ist umgekehrt $h \in A_i \cap H$, so ist h_π konjugiert zu einem Element in B_i. Folglich ist $hN = h_\pi N \in C_i$ wegen (iii) und damit $h \in B_i$. Nach Definition ist $A_1 \cap H = H \setminus \bigcup_{i=2}^k (A_i \cap H) = H \setminus \bigcup_{i=2}^k B_i = B_1$.

Für $p \in \pi$ enthält H wegen (ii) eine p-Sylowgruppe von G. Daher ist jedes p-Element $x \in G$ zu einem Element $y \in H$ konjugiert. Wir sagen, dass x im Fall $y \in H \setminus N$ vom Typ I und im Fall $y \in N$ vom Typ II ist. Nach (iii) ist x entweder vom Typ I oder vom Typ II, aber nicht beides. Für jedes $g \in G$ setzen wir

$$\alpha(g) := \prod_{\substack{p \in \pi,\\ g_p \text{ vom Typ I}}} g_p \qquad \text{und} \qquad \beta(g) := \prod_{\substack{p \in \pi,\\ g_p \text{ vom Typ II}}} g_p.$$

Dann ist $g = \alpha(g)\beta(g)g_{\pi'}$.

Behauptung 3: Für jedes $g \in G$ mit $\alpha(g) \neq 1$ ist g_π zu einem Element in $H \setminus N$ konjugiert.
Beweis: Ist g_π ein p-Element für eine Primzahl p, so ist g_π vom Typ I wegen $\alpha(g) \neq 1$, und wir sind fertig. Ist g_π kein p-Element, so existiert ein Primteiler p von $|\langle g_\pi \rangle|$ mit $g_\pi = xg_p$ und $\alpha(x) \neq 1$ für $x := g_{\pi \setminus \{p\}}$. Folglich existiert ein $q \in \pi \setminus \{p\}$, sodass g_q vom Typ I ist. Argumentieren wir durch Induktion nach der Anzahl der Primfaktoren von $|\langle g_\pi \rangle|$, so können wir annehmen, dass x zu einem Element in $H \setminus N$ konjugiert ist. Indem wir g durch ein Konjugiertes ersetzen, können wir sogar $x \in H \setminus N$ annehmen. Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{C}_G(x))$ mit $g_p \in P$. Nach (iv) ist $\langle x \rangle P$ zu einer Untergruppe von H konjugiert. Insbesondere ist $g_\pi = xg_p$ zu einem Element $h \in H$ konjugiert. Im Fall $h \in N$ wäre $h_q \in N$. Dann wäre aber g_q vom Typ II. Also ist $h \notin N$, und die Behauptung ist bewiesen.

Behauptung 4: $A_1 = \{g \in G : \alpha(g) = 1\}$.
Beweis: Ist nämlich $g \in G$ mit $\alpha(g) \neq 1$, so ist $g \in A_i$ für ein $i \in \{2, \ldots, k\}$ nach Behauptung 3. Ist umgekehrt $g \in A_i$ für ein $i \in \{2, \ldots, k\}$, so ist g_π zu einem Element $h \in B_i$ konjugiert. Folglich ist $\alpha(g)$ zu $\alpha(h)$ und $\beta(g)$ zu $\beta(h)$ konjugiert. Jeder p-Faktor y von $\beta(h)$ liegt also in H und ist zu einem Element in N konjugiert. Nach (iii) ist also $y \in N$. Dies zeigt: $\beta(h) \in N$. Folglich ist $\alpha(h)N = \alpha(h)\beta(h)N = hN \in C_i$ und damit $\alpha(h) \in B_i$. Insbesondere ist $\alpha(h) \neq 1$ und $\alpha(g) \neq 1$.

Behauptung 5: $g \in A_i \Longrightarrow \alpha(g), g_\pi \in A_i$.
Beweis: Für $g \in A_i$ ist $g_\pi \in A_i$ nach Definition von A_i. Für $i = 1$ ist $\alpha(g) = 1 \in B_1 \subseteq A_1$ nach Behauptung 4. Sei also $i \geq 2$. Dann ist wie oben $\alpha(g)$ konjugiert zu einem Element $\alpha(h) \in B_i \subseteq A_i$, also auch $\alpha(g) \in A_i$.

Behauptung 6: $\alpha(g) = 1 \Longrightarrow \alpha(g^n) = 1$ für $n \in \mathbb{N}$.
Beweis: Für $\alpha(g) = 1$ ist jeder p-Faktor (für $p \in \pi$) von g zu einem Element in N konjugiert. Daher ist auch jeder p-Faktor von g^n zu einem Element von N konjugiert. Dies zeigt $\alpha(g^n) = 1$.

Behauptung 7: Ist $E = U \times Q \le G$ eine π-Untergruppe mit $U = \langle u \rangle$, $\alpha(u) \ne 1$ und $Q \in \mathrm{Syl}_p(E)$, so ist E zu einer Untergruppe von H konjugiert.
Beweis: Wegen $\alpha(u) \ne 1$ ist $u = u_\pi$ zu einem Element in $H \setminus N$ konjugiert (Behauptung 3). Indem wir E durch ein Konjugiertes ersetzen, können wir also $u \in H \setminus N$ annehmen. Dann folgt die Behauptung aus (iv).

Sei $\mathrm{Irr}(H/N) = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\} \subseteq \mathrm{Irr}(H)$. Für $i = 1, \ldots, k$ ist dann ψ_i konstant auf jedem B_j und besitzt genau eine Fortsetzung $\chi_i \in \mathrm{CF}(G)$, die konstant auf jedem A_j ist. Wir zeigen $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$ mit Satz 6.8. Dazu sei $E = E_\pi \times E_{\pi'} \le G$ elementar, wobei E_π eine π-Gruppe und $E_{\pi'}$ eine π'-Gruppe ist. Für $x \in E$ ist $x_\pi \in E_\pi$ und $\chi_i(x) = \chi_i(x_\pi)$, denn x und x_π liegen im gleichen A_j (Behauptung 5). Daher ist $(\chi_i)_E = (\chi_i)_{E_\pi} 1_{E_{\pi'}}$ und wir können $E = E_\pi$ annehmen (Aufgabe 17). Sei $E = U \times Q$ mit $U = \langle u \rangle$ und $Q \in \mathrm{Syl}_p(E)$ ist. Im Fall $\alpha(u) \ne 1$ können wir E durch ein Konjugiertes ersetzen und $E \le H$ annehmen (Behauptung 7). Dann ist $(\chi_i)_E = (\psi_i)_E$ ein Charakter von E. Sei also $\alpha(u) = 1$. Sei $x = u^n v \in E$ mit $v \in Q$. Nach Behauptung 6 ist $\alpha(x) = \alpha(u^m v) = \alpha(u^m)\alpha(v) = \alpha(v)$ und

$$\chi_i(x) = \chi_i(\alpha(x) \underbrace{\beta(x)}_{\in \mathrm{Ker}(\chi_i)}) = \chi_i(\alpha(x)) = \chi_i(\alpha(v)) = \chi_i(v).$$

Dies zeigt $(\chi_i)_E = 1_U (\chi_i)_Q$ und wir können $E = Q$ annehmen. Nach Sylow können wir $E \le H$ annehmen. Dann ist aber $(\chi_i)_E = (\psi_i)_E$ ein Charakter von E. Also ist χ_i ein virtueller Charakter von G.

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $b_i \in B_i$ und $\theta_i := \sum_{j=1}^k \psi_j(b_i^{-1})\chi_j$. Nach der zweiten Orthogonalitätsrelation für H/N ist dann

$$\begin{aligned}
(\theta_i, 1_G)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta_i(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{j=1}^k \psi_j(b_i^{-1})\chi_j(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{r=1}^k |A_r| \sum_{j=1}^k \psi_j(b_i^{-1})\psi_j(b_r) \\
&= \frac{|A_i|}{|G|} |\mathrm{C}_{H/N}(b_i N)| = \frac{|A_i|}{|G|} \frac{|H:N|}{|C_i|} = \frac{|A_i|}{|G:H| \cdot |C_i||N|} = \frac{|A_i|}{|G:H||B_i|} \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Andererseits sind die Vielfachheiten der irreduziblen Bestandteile von θ_i offenbar ganz-algebraisch. Nach Lemma 3.5 ist also $(\theta_i, 1_G)_G = \frac{|A_i|}{|G:H||B_i|} \in \mathbb{N}$ und $|A_i| \ge |G:H||B_i|$. Daher ist

$$|G| = \sum_{i=1}^k |A_i| \ge |G:H| \sum_{i=1}^k |B_i| = |G:H||H| = |G|.$$

Für $i = 1, \ldots, k$ ist also $|A_i| = |G:H||B_i|$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
(\chi_i, \chi_i)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\chi_i(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^k |A_j| \psi_i(b_j)\psi_i(b_j^{-1}) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{j=1}^k |B_j| \psi_i(b_j)\psi_i(b_j^{-1}) = (\psi_i, \psi_i)_H = 1.
\end{aligned}$$

Wegen $\chi_i(1) = \psi_i(1) > 0$ ist somit $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$ nach Satz 6.8. Wegen $B_1 = N = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(\psi_i)$ ist $A_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(\chi_i)$. Für $x \in B_i \subseteq A_i$ mit $i \ge 2$ existiert ein ψ_j mit $\chi_j(x) = \psi_j(x) \ne \psi_j(1) = \chi_j(1)$.

Also ist $A_1 = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(\chi_i) \trianglelefteq G$ mit $A_1 \cap H = B_1 = N$. Wegen $|A_1| = |G : H||B_1| = |G : H||N|$ ist

$$|A_1 H| = \frac{|A_1||H|}{|A_1 \cap H|} = \frac{|G||N|}{|N|} = |G|.$$

Dies zeigt $A_1 H = G$, und wir sind fertig. □

Satz 8.5 (Dade). *Sei $N \trianglelefteq H \leq G$ und $\pi \subseteq \mathbb{P}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) H/N ist eine π-Gruppe.

(ii) Sind $x, y \in H$ konjugiert in G, so sind xN, yN konjugiert in H/N.

(iii) Jede elementare π-Untergruppe von G ist zu einer Untergruppe von H konjugiert.

Dann existiert ein Normalteiler M von G mit $G = HM$ und $H \cap M = N$.

Beweis. Sei $p \in \pi$ und $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Da P elementar ist, ist P zu einer Untergruppe von H konjugiert, also $p \nmid |G : H|$. Damit erfüllt G die Voraussetzungen von Satz 8.3, und wir sind fertig. □

Satz 8.6 (Brauer-Suzuki). *Sei $\pi \subseteq \mathbb{P}$ und H eine π-Untergruppe von G mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Sind $x, y \in H$ konjugiert in G, so auch in H.

(ii) Jede elementare π-Untergruppe von G ist zu einer Untergruppe von H konjugiert.

Dann existiert ein Normalteiler M von G mit $G = HM$ und $H \cap M = 1$.

Beweis. Satz 8.5 mit $N := 1$. □

Lemma 8.7. *Sei P eine p-Gruppe und $U < P$. Dann ist $U < \mathrm{N}_P(U)$.*

Beweis. Wir argumentieren durch Induktion nach $|P|$. Im Fall $|P| = p$ ist $1 = U < \mathrm{N}_P(U) = P$. Sei also $|P| > p$. Wegen $\mathrm{Z}(P) \subseteq \mathrm{N}_P(U)$ können wir $\mathrm{Z}(P) \subseteq U$ annehmen. Nach Algebra 1 ist $\mathrm{Z}(P) \neq 1$. Sei $\overline{P} := P/\mathrm{Z}(P)$ und $\overline{U} := U/\mathrm{Z}(P)$. Nach Induktion ist dann $\overline{U} < \mathrm{N}_{\overline{P}}(\overline{U})$. Also existiert ein $x \in P \setminus U$ mit $xUx^{-1}/\mathrm{Z}(P) = \overline{x}\overline{U}\overline{x}^{-1} = \overline{U} = U/\mathrm{Z}(P)$. Es folgt $x \in \mathrm{N}_P(U)$. □

Bemerkung 8.8. Der folgende Satz verallgemeinert Satz 5.8.

Satz 8.9 (Wielandt). *Sei $N \trianglelefteq H \leq G$. Ferner sei $H \cap xHx^{-1} \subseteq N$ für alle $x \in G \setminus H$. Dann existiert ein Normalteiler M von G mit $G = HM$ und $H \cap M = N$.*

Beweis. Bezeichnet man mit π die Menge der Primteiler von $|H/N|$, so ist Satz 8.3(i) erfüllt. Sei $p \in \pi$, $Q \in \mathrm{Syl}_p(H)$ und $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ mit $Q \subseteq P$. Bekanntlich ist $QN/N \in \mathrm{Syl}_p(H/N)$, also $QN/N \neq 1$ wegen $p \mid |H/N|$. Folglich ist $Q \nsubseteq N$. Für $g \in \mathrm{N}_P(Q)$ ist $Q = gQg^{-1} \subseteq H \cap gHg^{-1}$. Wegen $Q \nsubseteq N$ folgt $g \in H$. Daher ist $\mathrm{N}_P(Q) \subseteq H \cap P = Q$ und damit $P = Q$ nach Lemma 8.7. Folglich ist $p \nmid |G : H|$, und Satz 8.3(ii) ist erfüllt. Seien $x, y \in H$ und $g \in G$ mit $y = gxg^{-1}$. Im Fall $g \in H$ ist $yN = (gN)(xN)(gN)^{-1}$. Sei also $g \notin H$. Dann ist $y = gxg^{-1} \in H \cap gHg^{-1} \subseteq N$ und analog $x \in N$, also $yN = 1 = xN$ in H/N. Damit ist Satz 8.3(iii) erfüllt. Sei schließlich $x \in H \setminus N$ und $g \in \mathrm{C}_G(x)$. Dann ist $x = gxg^{-1} \in H \cap gHg^{-1}$, also $g \in H$. Folglich ist $\mathrm{C}_G(x) \subseteq H$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 8.3 erfüllt, und die Behauptung folgt. □

Satz 8.10. *Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Sind je zwei Elemente in P, die in G konjugiert sind, auch schon in P konjugiert, so besitzt P ein normales Komplement in G.*

Beweis. Folgt nach Sylow und Satz 8.6 mit $\pi = \{p\}$ und $H = P$. □

Satz 8.11 (Burnsides Verlagerungssatz)**.** *Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ mit $\mathrm{N}_G(P) = \mathrm{C}_G(P)$. Dann besitzt P ein normales Komplement in G.*

Beweis. Wegen $P \subseteq \mathrm{N}_G(P) = \mathrm{C}_G(P)$ ist P abelsch. Seien $x, y \in P$ und $g \in G$ mit $gxg^{-1} = y$. Dann ist $P \le \mathrm{C}_G(x)$ und $g^{-1}Pg \le g^{-1}\mathrm{C}_G(y)g = \mathrm{C}_G(g^{-1}yg) = \mathrm{C}_G(x)$. Nach Sylow existiert ein $c \in \mathrm{C}_G(x)$ mit $cPc^{-1} = g^{-1}Pg$. Also ist $gc \in \mathrm{N}_G(P) = \mathrm{C}_G(P) \le \mathrm{C}_G(x)$. Somit ist $g \in \mathrm{C}_G(x)$ und $y = gxg^{-1} = x$. Nun folgt die Behauptung aus Satz 8.10. □

Bemerkung 8.12. Üblicherweise beweist man Satz 8.11 in der Gruppentheorie mittels Verlagerung.

Satz 8.13. *Sei p der kleinste Primteiler von $|G|$, und sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ zyklisch. Dann besitzt P ein normales Komplement in G.*

Beweis. Wie üblich operiert $\mathrm{N}_G(P)$ durch Konjugation auf P. Dies liefert einen Homomorphismus $\mathrm{N}_G(P) \to \mathrm{Aut}(P)$ mit Kern $\mathrm{C}_G(P)$. Also ist $\mathrm{N}_G(P)/\mathrm{C}_G(P)$ zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(P)$ isomorph. Da P zyklisch ist, gilt $P \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. In der Algebra 1 zeigt man $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Dies zeigt $|\mathrm{N}_G(P)/\mathrm{C}_G(P)| \mid |\mathrm{Aut}(P)| = \varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$. Da P zyklisch ist, gilt $P \subseteq \mathrm{C}_G(P)$ und $|\mathrm{N}_G(P)/\mathrm{C}_G(P)| \mid p-1$. Da p der kleinste Primteiler von $|G|$ ist, ist sogar $\mathrm{N}_G(P) = \mathrm{C}_G(P)$, und die Behauptung folgt aus Burnsides Verlagerungssatz. □

Beispiel 8.14. Sei $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ zyklisch. Nach Satz 8.13 besitzt P ein normales Komplement N in G. Nach Feit-Thompson ist N auflösbar. Wegen $G/N = PN/N \cong P/P \cap N \cong P$ ist damit auch G auflösbar. Wir beweisen eine schwächere Aussage ohne den Satz von Feit und Thompson.

Satz 8.15. *Sind alle Sylowgruppen von G zyklisch, so ist G auflösbar.*

Beweis. Wir argumentieren durch Induktion nach $|G|$. O. B. d. A. sei $G \ne 1$. Sei p der kleinste Primteiler von G und $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Nach Satz 8.13 existiert ein $N \trianglelefteq G$ mit $G = PN$ und $P \cap N = 1$. Jede Sylowgruppe von N liegt in einer Sylowgruppe von G und ist damit zyklisch. Nach Induktion ist also N auflösbar. Bekanntlich ist auch jede p-Gruppe auflösbar. Mit N und $G/N = PN/N \cong P/P \cap N \cong P$ ist also auch G auflösbar. □

Bemerkung 8.16. In der Situation von Satz 8.15 kann man weiter zeigen, dass G' und G/G' zyklisch sind (ohne Beweis). Insbesondere ist $G'' = 1$.

Beispiel 8.17. Gruppen quadratfreier Ordnung sind auflösbar.

Satz 8.18 (Frobenius)**.** *Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und für jede Untergruppe $1 \ne Q \le P$ sei $\mathrm{N}_G(Q)/\mathrm{C}_G(Q)$ eine p-Gruppe. Dann besitzt P ein normales Komplement in G.*

Beweis. Nach Sylow gilt die Voraussetzung für alle $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Sei Γ die Menge der Paare (P, Q) mit $P, Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$, sodass ein $c \in \mathrm{C}_G(P \cap Q)$ mit $P = cQc^{-1}$ existiert. Wir zeigen, dass Γ alle Paare von Sylowgruppen enthält. Sei $P, P_1 \in \mathrm{Syl}_p(G)$ mit $(P, P_1) \notin \Gamma$, sodass $|P \cap P_1|$ maximal ist. Offenbar ist dann $D := P \cap P_1 < P$ (anderenfalls könnte man $c = 1$ wählen). Sei $N := \mathrm{N}_G(D)$ und $P \cap N \subseteq S \in \mathrm{Syl}_p(N)$ sowie $P_1 \cap N \subseteq T \in \mathrm{Syl}_p(N)$. Schließlich sei $S \subseteq R \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Da $S\,\mathrm{C}_G(D)/\,\mathrm{C}_G(D)$ eine p-Sylowgruppe von $N/\,\mathrm{C}_G(D)$ ist, impliziert die Voraussetzung $N = S\,\mathrm{C}_G(D)$. Nach Sylow existiert ein $n \in N$ mit $T = nSn^{-1}$. Wegen $N = S\,\mathrm{C}_G(D) = \mathrm{C}_G(D)S$ können wir $n \in \mathrm{C}_G(D)$ annehmen. Nach Lemma 8.7 ist

$$D < \mathrm{N}_P(D) = N \cap P \subseteq S \cap P \subseteq R \cap P.$$

Nach Wahl von (P, P_1) existiert ein $x \in \mathrm{C}_G(P \cap R) \subseteq \mathrm{C}_G(D)$ mit $P = xRx^{-1}$. Analog ist auch

$$D < \mathrm{N}_{P_1}(D) = N \cap P_1 \subseteq T \cap P_1 = nSn^{-1} \cap P_1 \subseteq nRn^{-1} \cap P_1$$

und es existiert ein $y \in \mathrm{C}_G(nRn^{-1} \cap P_1) \subseteq \mathrm{C}_G(D)$ mit $nRn^{-1} = yP_1y^{-1}$. Insgesamt ist also $P = xRx^{-1} = xn^{-1}yP_1y^{-1}nx^{-1}$ mit $xn^{-1}y \in \mathrm{C}_G(D) = \mathrm{C}_G(P \cap P_1)$. Dieser Widerspruch zeigt, dass Γ alle Paare (P, Q) mit $P, Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$ enthält.

Seien nun $x, y \in P$ und $g \in G$ mit $y = gxg^{-1}$. Dann ist $y \in P \cap gPg^{-1}$. Nach dem eben gezeigten existiert ein $c \in \mathrm{C}_G(P \cap gPg^{-1}) \subseteq \mathrm{C}_G(y)$ mit $cPc^{-1} = gPg^{-1}$. Da $P\,\mathrm{C}_G(P)/\,\mathrm{C}_G(P)$ eine p-Sylowgruppe von $\mathrm{N}_G(P)/\,\mathrm{C}_G(P)$ ist, folgt $\mathrm{N}_G(P) = P\,\mathrm{C}_G(P)$ nach Voraussetzung. Also ist $c^{-1}g = ab$ mit $a \in P$ und $b \in \mathrm{C}_G(P) \subseteq \mathrm{C}_G(x)$. Dann ist $y = c^{-1}yc = c^{-1}gxg^{-1}c = abxb^{-1}a^{-1} = axa^{-1}$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 8.10. $\square$

Satz 8.19 (Satz von der Fokalgruppe)**.** *Für $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ ist*

$$P \cap G' = \langle xy^{-1} : x, y \in P \text{ sind in } G \text{ konjugiert}\rangle.$$

Beweis. Sind $x, y \in P$ in G konjugiert, so existiert ein $g \in G$ mit $xy^{-1} = xgx^{-1}g^{-1} = [x, g]$. Dies zeigt $P_1 := \langle xy^{-1} : x, y \in P \text{ sind in } G \text{ konjugiert}\rangle \subseteq P \cap G'$. Für $x, y \in P$ ist umgekehrt $[x, y] = x(yx^{-1}y^{-1}) = x(yxy^{-1})^{-1} \in P_1$. Also ist $P' \subseteq P_1 \trianglelefteq P$ und P/P_1 ist abelsch. Sei $\lambda \in \mathrm{Irr}(P/P_1) \subseteq \mathrm{Irr}(P)$. Sei $g \in G$. Dann existiert ein $x \in G$ mit $xg_px^{-1} \in P$. Wir definieren $\psi(g) := \lambda(xg_px^{-1})$. Ist auch $yg_py^{-1} \in P$ für ein $y \in G$, so gilt

$$(xg_px^{-1})(yg_p^{-1}y^{-1}) = (xg_px^{-1})yx^{-1}(xg_px^{-1})^{-1}xy^{-1} \in P_1 \leq \mathrm{Ker}(\lambda).$$

Daher ist $\lambda(xg_px^{-1}) = \lambda(yg_py^{-1})$ und ψ ist wohldefiniert. Das gleiche Argument zeigt auch $\psi \in \mathrm{CF}(G)$. Wir zeigen $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit Satz 6.8. Sei dafür $E \leq G$ elementar und $g, h \in E$. Da E das direkte Produkt seiner Sylowgruppen ist, gilt $(gh)_p = g_ph_p$ und $\langle g_p, h_p\rangle$ ist eine p-Gruppe. Also existiert ein $x \in G$ mit $x\langle g_p, h_p\rangle x^{-1} \leq P$. Dann ist

$$\psi(gh) = \lambda(x(gh)_px^{-1}) = \lambda(xg_px^{-1}xh_px^{-1}) = \lambda(xg_px^{-1})\lambda(xh_px^{-1}) = \psi(g)\psi(h).$$

Wegen $\psi(1) = \lambda(1) = 1$ ist $\psi_E \in \mathrm{Irr}(E)$. Wegen $|\psi(g)| = 1$ für alle $g \in G$ gilt auch $(\psi, \psi)_G = 1$. Nach Satz 6.8 ist also $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$. Sei nun $g \in P \setminus P_1$. Durch geeignete Wahl von λ können wir $\psi(g) = \lambda(g) \neq 1$ annehmen. Wegen $\psi(1) = 1$ ist also $g \notin P \cap G' \leq G' \leq \mathrm{Ker}(\psi)$. $\square$

9 Nullen in der Charaktertafel

Satz 9.1 (Burnside)**.** *Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\chi(1) > 1$. Dann existiert ein $g \in G$ mit $\chi(g) = 0$.*

Beweis. Nehmen wir $\chi(g) \neq 0$ für alle $g \in G$ an. Sei $\zeta := e^{2\pi i/|G|} \in \mathbb{C}$ und $\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q})$. Für $\gamma \in \mathcal{G}$ mit $\gamma(\zeta) = \zeta^m$ gilt $\gamma(\chi(g)) = \chi(g^m)$ nach Beispiel 6.15. Wegen $\mathrm{ggT}(|G|, m) = 1$ ist die Abbildung $g \mapsto g^m$ eine Bijektion auf $G \setminus \{1\}$. Da $\mathcal{G}$ abelsch ist, gilt $\gamma(\chi(g)\overline{\chi(g)}) = \chi(g^m)\overline{\chi(g^m)}$. Also ist $\omega := \prod_{1 \neq g \in G} |\chi(g)|^2 > 0$ im Fixkörper von $\mathcal{G}$, d. h. in $\mathbb{Q}$. Andererseits ist ω ganz-algebraisch und es folgt $\omega \in \mathbb{Z}$ aus Lemma 3.5. Insbesondere ist $\omega \geq 1$ und die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel zeigt

$$\frac{1}{|G| - 1} \sum_{1 \neq g \in G} |\chi(g)|^2 \geq \omega^{\frac{1}{|G|-1}} \geq 1.$$

Also ist

$$|G| = |G|(\chi, \chi)_G = \chi(1)^2 + \sum_{1 \neq g \in G} |\chi(g)|^2 \geq \chi(1)^2 + |G| - 1$$

und wir erhalten die Widerspruch $\chi(1) = 1$. □

Bemerkung 9.2. Für $\chi(1) = 1$ gilt offenbar $\chi(g) \neq 0$ für alle $g \in G$. Der nächste Satz zeigt, wo man Nullen in der Charaktertafel finden kann.

Satz 9.3 (Brauer)**.** *Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $p \in \mathbb{P}$ mit $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$. Dann ist $\chi(g) = 0$ für alle $g \in G$ mit $p \mid |\langle g \rangle|$.*

Beweis. Wir definieren eine Klassenfunktion θ auf G durch

$$\theta(g) := \begin{cases} \chi(g) & \text{falls } p \nmid |\langle g \rangle|, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst, dass θ ein virtueller Charakter ist. Dazu sei $E = P \times Q \leq G$ elementar mit $P \in \mathrm{Syl}_p(E)$ (man beachte, dass E nicht unbedingt p-elementar ist). Dann ist $\theta(x) = 0$ für alle $x \in E \setminus Q$ und $\theta(x) = \chi(x)$ für $x \in Q$. Für $\psi \in \mathrm{Irr}(E)$ ist also

$$|P|(\theta_E, \psi)_E = \frac{1}{|Q|} \sum_{x \in Q} \chi(x)\psi(x^{-1}) = (\chi_Q, \psi_Q)_Q \in \mathbb{Z}.$$

Sei $g \in K \in \mathrm{Cl}(G)$ und $\omega(g) := \omega_\chi(K) = \frac{|K|\chi(g)}{\chi(1)} = \frac{|G|\chi(g)}{|\mathrm{C}_G(g)|\chi(1)}$ (siehe Lemma 1.23). Dann ist

$$|E|(\theta_E, \psi)_E = \sum_{x \in Q} \chi(x)\psi(x^{-1}) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{x \in Q} \omega(x)\psi(x^{-1})|\mathrm{C}_G(x)|.$$

Für $x \in Q$ ist $P \subseteq \mathrm{C}_G(x)$. Daher ist

$$\frac{|G||Q|}{\chi(1)}(\theta_E, \psi)_E = \sum_{x \in Q} \omega(x)\psi(x^{-1})|\mathrm{C}_G(x) : P|$$

eine ganz-algebraische Zahl in $\mathbb{Q}$ nach Lemma 3.6. Folglich ist

$$\frac{|G||Q|}{\chi(1)}(\theta_E, \psi)_E \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $\frac{|G||Q|}{\chi(1)} \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(\frac{|G||Q|}{\chi(1)}, |P|) = 1$ ist auch $(\theta_E, \psi)_E \in \mathbb{Z}$. Dies zeigt, dass θ_E ein virtueller Charakter von E ist. Nach Brauer ist θ ein virtueller Charakter von G (siehe Beweis von Satz 6.8). Insbesondere ist $(\theta, \chi)_G \in \mathbb{Z}$. Andererseits ist

$$0 < \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G, \\ p \nmid |\langle g \rangle|}} \chi(g)\overline{\chi(g)} = (\theta, \chi)_G \leq (\chi, \chi)_G = 1.$$

Daher ist $(\theta, \chi)_G = (\chi, \chi)_G = 1$ und

$$0 = (\chi - \theta, \chi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G, \\ p \,\big|\, |\langle g \rangle|}} |\chi(g)|^2,$$

d. h. $\chi(g) = 0$ für alle $g \in G$ mit $p \;\big|\; |\langle g \rangle|$. $\square$

Bemerkung 9.4. In der Situation von Satz 9.3 sagt man: χ hat *p-Defekt* 0.

10 Endliche lineare Gruppen

Bemerkung 10.1. Besitzt G eine treue Darstellung vom Grad G, so ist G zu einer Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ isomorph. In diesem Kapitel werden wir sehen, dass G „große“ abelsche Normalteiler besitzt (in Bezug auf n). Im Fall $n = 1$ ist G als Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ sogar zyklisch.

Definition 10.2. Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei

$$\|A\| := \sqrt{\mathrm{Spur}(A\overline{A}^{\mathrm{T}})} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Bemerkung 10.3.

(i) Schreibt man $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in der Form $A = A_1 + A_2 i$ mit $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so wird $\mathbb{C}^{n \times n}$ zum euklidischen Raum der Dimension $2n^2$ (über $\mathbb{R}$) mit der üblichen Norm. Insbesondere gilt

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \qquad \text{und} \qquad \|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$$

für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) Sei $\mathrm{U}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : A^{-1} = \overline{A}^{\mathrm{T}}\} \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ die *unitäre Gruppe* vom Grad n. Für $U, V \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist dann

$$\begin{aligned} \|UAV\|^2 &= \mathrm{Spur}(UAV\overline{V}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}\overline{U}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Spur}(U(A\overline{A}^{\mathrm{T}})U^{-1}) = \mathrm{Spur}(U^{-1}UA\overline{A}^{\mathrm{T}}) \\ &= \mathrm{Spur}(A\overline{A}^{\mathrm{T}}) = \|A\|^2. \end{aligned}$$

(iii) Der Spektralsatz aus der linearen Algebra besagt, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A\overline{A}^{\mathrm{T}} = \overline{A}^{\mathrm{T}}A$ eine Matrix $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ existiert, sodass UAU^{-1} eine Diagonalmatrix ist.[2] Insbesondere gilt dies, falls A unitär oder *hermitesch* ist (d. h. $\overline{A}^{\mathrm{T}} = A$).

[2]Siehe Vorlesungsskript Lineare Algebra

Satz 10.4. *Jede Darstellung $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ist zu einer Darstellung $\Delta' : G \to \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ ähnlich.*

Beweis. Die Matrix $M := \sum_{g\in G} \Delta(g)\overline{\Delta(g)}^{\mathrm{T}}$ ist hermitesch. Nach dem Spektralsatz existiert $U \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ mit $UMU^{-1} = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Wegen $\overline{U}^{\mathrm{T}} = U^{-1}$ ist dann

$$D = UMU^{-1} = \sum_{g\in G} U\Delta(g)U^{-1}U\overline{\Delta(g)}^{\mathrm{T}}U^{-1} = \sum_{g\in G} U\Delta(g)U^{-1} \cdot \overline{U\Delta(g)U^{-1}}^{\mathrm{T}}.$$

Wir können also annehmen, dass M eine Diagonalmatrix ist. Nach Definition sind die Hauptdiagonaleinträge von M reell und positiv. Insbesondere ist $M = P^2$ für ein $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Wie üblich gilt $\Delta(h)M\overline{\Delta(h)}^{\mathrm{T}} = M$ und $(P^{-1}\Delta(h)P)(P\overline{\Delta(h)}^{\mathrm{T}}P^{-1}) = 1_n$ für alle $h \in G$. Also ist $P^{-1}\Delta(h)P \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ für alle $h \in G$. □

Satz 10.5 (Jordan)**.** *Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Jede endliche Gruppe $G \le \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ besitzt einen abelschen Normalteiler $A \trianglelefteq G$ mit $|G : A| \le f(n)$.*

Beweis (Tao). Induktion nach n: Im Fall $n = 1$ können wir sicher $f(1) := 1$ setzen. Sei $n \ge 2$. Die Inklusionsabbildung $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ist eine Darstellung von Grad n. Nach Satz 10.4 können wir $G \le \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ annehmen, indem wir G durch xGx^{-1} für ein $x \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ersetzen.

Sei $\epsilon > 0$ und

$$H := \langle x \in G : \|x - 1\| < \epsilon\rangle.$$

Für $x \in H$ mit $\|x-1\| < \epsilon$ und $g \in G$ ist $\|gxg^{-1}-1\| = \|gxg^{-1}-gg^{-1}\| = \|g(x-1)g^{-1}\| = \|x-1\| < \epsilon$ nach Bemerkung 10.3. Also ist $H \trianglelefteq G$. Sei $x_1, \ldots, x_s \in G$ ein Repräsentantensystem für G/H. Dann ist $\|x_i - x_j\| = \|x_ix_j^{-1} - 1\| \ge \epsilon$ für $i \ne j$. Andererseits gilt $\|x_i\| = \sqrt{\mathrm{Spur}(x_i\overline{x_i}^{\mathrm{T}})} = \sqrt{\mathrm{Spur}(1_n)} = \sqrt{n}$ für $i = 1, \ldots, s$. Die Teilmenge $M := \{x \in \mathbb{C}^{n\times n} : \|x\| = \sqrt{n}\}$ des euklidischen Raums $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist beschränkt und abgeschlossen (d. h. kompakt). Nach dem Satz von Heine-Borel aus Analysis 1 lässt sich M durch endlich viele, sagen wir $g(n)$, offene Kugeln vom Radius $\epsilon/2$ überdecken. In jeder Kugel kann höchstens ein x_i liegen. Insbesondere ist $|G : H| = s \le g(n)$.

Annahme: $\mathrm{Z}(H) \le \mathbb{C}^\times 1_n$.
Im Fall $\mathrm{Z}(H) = H$ sind wir fertig mit $A := H$ und $f(n) := g(n)$. Sei also $x \in H \setminus \mathrm{Z}(H)$, sodass $\|x - 1\|$ minimal ist (G endlich). Da nicht alle Erzeuger von H in $\mathrm{Z}(H)$ liegen können, ist $\|x - 1\| < \epsilon$. Sei außerdem $y \in H$ mit $\|y - 1\| < \epsilon$. Wir wählen $u \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$, sodass uxu^{-1} eine Diagonalmatrix ist (Spektralsatz). Schreibe $u(x-1)u^{-1} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $u(y-1)u^{-1} = (\beta_{ij})$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|(x-1)(y-1)\|^2 &= \|u(x-1)u^{-1}u(y-1)u^{-1}\|^2 = \sum_{i,j} |\alpha_i\beta_{ij}|^2 \le \sum_{i,j,k} |\alpha_i|^2|\beta_{jk}|^2 \\ &= \Big(\sum_i |\alpha_i|^2\Big)\Big(\sum_{j,k} |\beta_{jk}|^2\Big) = \|u(x-1)u^{-1}\|^2\|u(y-1)u^{-1}\|^2 = \|x-1\|^2\|y-1\|^2.\end{aligned}$$

Analog ist auch $\|(y-1)(x-1)\| \le \|x-1\|\|y-1\|$. Es folgt

$$\|xyx^{-1}y^{-1}-1\| = \|xy-yx\| = \|(x-1)(y-1)-(y-1)(x-1)\| \le 2\|x-1\|\|y-1\| < 2\epsilon\|x-1\| < \|x-1\|$$

für $\epsilon < \frac{1}{2}$. Nach Wahl von x ist also $z := xyx^{-1}y^{-1} \in \mathrm{Z}(H)$. Nach der Annahme ist $z = \lambda 1_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Offenbar ist $\det(z) = \det(xyx^{-1}y^{-1}) = 1$, d. h. $\lambda^n = 1$. Insbesondere gibt es nur n Möglichkeiten für λ. Es gilt $|\lambda - 1|\sqrt{n} = \|z - 1\| < \|x - 1\| < \epsilon$. Wählt man ϵ klein genug, so folgt $\lambda = 1$ und $xyx^{-1}y^{-1} = z = 1$. Also ist x mit allen Erzeugern von H vertauschbar. Dies liefert den Widerspruch $x \in \mathrm{Z}(H)$.

Also existiert $z \in \mathrm{Z}(H) \setminus \mathbb{C}1_n$. Wegen $z \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ existiert ein $u \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ mit

$$d := uzu^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 1_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_k 1_{n_k} \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ paarweise verschieden sind (o. B. d. A.). Wegen $z \notin \mathbb{C}1_n$ gilt $k > 1$. Man zeigt leicht:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}(d) = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}(n_1,\mathbb{C}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{GL}(n_k,\mathbb{C}) \end{pmatrix} \cong \mathrm{GL}(n_1,\mathbb{C}) \times \ldots \times \mathrm{GL}(n_k,\mathbb{C}).$$

Somit ist auch $H \le \mathrm{C}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}(z) = u^{-1}\,\mathrm{C}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}(d)u \cong \mathrm{GL}(n_1,\mathbb{C}) \times \ldots \times \mathrm{GL}(n_k,\mathbb{C})$. Sei $\pi_i : H \to \mathrm{GL}(n_i,\mathbb{C})$ die i-te Projektion. Wegen $k > 1$ ist $n_i < n$. Nach Induktion existiert ein abelscher Normalteiler $N_i/\mathrm{Ker}(\pi_i) \trianglelefteq H/\mathrm{Ker}(\pi_i) \cong \pi_i(H) \le \mathrm{GL}(n_i,\mathbb{C})$ mit $|H : N_i| = |H/\mathrm{Ker}(\pi_i) : N_i/\mathrm{Ker}(\pi_i)| \le f(n_i)$. Sei

$$\pi : H \to H/\mathrm{Ker}(\pi_1) \times \ldots \times H/\mathrm{Ker}(\pi_k), \qquad g \mapsto (g\,\mathrm{Ker}(\pi_1), \ldots, g\,\mathrm{Ker}(\pi_k)).$$

Dann ist $\mathrm{Ker}(\pi) = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(\pi_i) = 1$. Wir definieren

$$K := \pi^{-1}(N_1/\mathrm{Ker}(\pi_1) \times \ldots \times N_k/\mathrm{Ker}(\pi_k)) = N_1 \cap \ldots \cap N_k.$$

Da π injektiv ist, ist K ein abelscher Normalteiler von H. Da auch die Abbildung $H/K \to H/N_1 \times \ldots \times H/N_k$, $gK \mapsto (gN_1, \ldots, gN_k)$ injektiv ist, gilt

$$|H : K| \le |H : N_1| \ldots |H : N_k| \le f(n_1) \ldots f(n_k).$$

Die Funktion $h(n) := \max\{f(i) : 1 \le i \le n-1\}^n$ erfüllt also $|H : K| \le h(n)$. Insgesamt ist $|G : K| = |G : H||H : K| \le g(n)h(n)$. Da die Normalteilerrelation nicht transitiv ist, ist allerdings nicht unbedingt $K \trianglelefteq G$. Wir betrachten daher die Operation $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(G/K)$ mit ${}^g(hK) := ghK$ für $g, h \in G$ (vgl. Beweis von Satz 7.11). Man zeigt leicht, dass $A := \mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq K$ gilt. Insbesondere ist A ein abelscher Normalteiler von G mit $|G : A| = |G : \mathrm{Ker}(\varphi)| \le |\mathrm{Sym}(G/K)| = |G : K|! \le (g(n)h(n))!$. Die Funktion $f(n) := (g(n)h(n))!$ erfüllt somit die Behauptung. □

Bemerkung 10.6.

(i) Wie in Aufgabe 20 zeigt man, dass $G := \mathrm{SL}(2,5)$ auf der Menge der sechs eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_5^2$ mit Kern $\mathrm{Z}(G) = \langle -1_2 \rangle$ operiert. Es folgt $\mathrm{SL}(2,5)/\mathrm{Z}(G) \cong A_5$ und $\mathrm{Z}(G)$ ist der größte abelsche Normalteiler von G. Außerdem besitzt G einen treuen (irreduziblen) Charakter vom Grad 2. Dies zeigt $f(2) \ge |G : \mathrm{Z}(G)| = 60$. Es gilt sogar Gleichheit (ohne Beweis).

(ii) Collins hat $|G : A| \le (n+1)!$ für $n \ge 71$ in der Situation von Satz 10.5 gezeigt. Nach Aufgabe 30 ist diese Schranke auch optimal. Der Beweis benutzt allerdings die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen.

Definition 10.7. Eine Untergruppe $H \le G$ heißt *π-Hallgruppe*, falls H eine π-Gruppe ist und kein Primteiler von $|G : H|$ in π liegt. Insbesondere ist $\mathrm{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$.

Beispiel 10.8.

(i) Die p-Hallgruppen von G sind genau die p-Sylowgruppen.

(ii) Sei G abelsch und $S_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Für $\pi \subseteq \mathbb{P}$ ist dann $G_\pi := \prod_{p \in \pi} S_p$ eine π-Hallgruppe von G.

(iii) A_5 besitzt keine $\{2,5\}$-Hallgruppe.

(iv) Nach Aufgabe 16 sind Frobeniuskerne und Frobeniuskomplemente stets Hallgruppen.

Definition 10.9.

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Q}_n := \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$.

(ii) Sei $p \in \mathbb{P}$ und $|G| = mp^a$ mit $p \nmid m$. Ein Charakter χ von G heißt *p-rational*, falls $\chi(g) \in \mathbb{Q}_m$ für alle $g \in G$ gilt.

Beispiel 10.10. Im Fall $p \nmid |\langle g \rangle|$ ist $\chi(g) \in \mathbb{Q}_m$ (als Summe von $|\langle g \rangle|$-ten Einheitswurzeln). Insbesondere ist jeder Charakter p-rational, falls $p \nmid |G|$.

Lemma 10.11. *Seien $p \neq q$ Primzahlen, sodass G kein Element der Ordnung pq besitzt. Dann ist jeder Charakter $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ p-rational oder q-rational.*

Beweis. Nehmen wir an, dass $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ weder p-rational noch q-rational ist. Wir schreiben $n := |G| = p^a m_p = q^b m_q$ mit $p \nmid m_p$ und $q \nmid m_q$. Sei $\mathcal{G}_p := \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_n|\mathbb{Q}_{m_p})$ und $\mathcal{G}_q := \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_n|\mathbb{Q}_{m_q})$. Dann existieren $\gamma_p \in \mathcal{G}_p$ und $\gamma_q \in \mathcal{G}_q$ mit ${}^{\gamma_p}\chi \neq \chi \neq {}^{\gamma_q}\chi$ (siehe Beispiel 6.15).

Ist $g \in G$ mit $p \nmid |\langle g \rangle|$, so ist $\chi(g) \in \mathbb{Q}_{m_p}$. Insbesondere ist $\gamma_p(\chi(g)) = \chi(g)$. Analog ist $\gamma_q(\chi(g)) = \chi(g)$ für $q \nmid |\langle g \rangle|$. Da G kein Element der Ordnung pq besitzt, gilt $p \nmid |\langle g \rangle|$ oder $q \nmid |\langle g \rangle|$ für alle $g \in G$. Dies zeigt

$$((\chi - {}^{\gamma_p}\chi), (\chi - {}^{\gamma_q}\chi))_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi - {}^{\gamma_p}\chi)(g)\overline{(\chi - {}^{\gamma_q}\chi)(g)} = 0.$$

Wegen ${}^{\gamma_p}\chi, {}^{\gamma_q}\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ ist $(\chi, {}^{\gamma_p}\chi)_G = (\chi, {}^{\gamma_q}\chi)_G = 0$. Es folgt der Widerspruch

$$0 = (\chi, \chi)_G + ({}^{\gamma_p}\chi, {}^{\gamma_q}\chi)_G \geq 1.$$

□

Lemma 10.12. *Für* $\operatorname{ggT}(n,m) = 1$ *ist* $\mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}$.

Beweis. Sei $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{nm}}$. Wegen $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}(\zeta^m)$ und $\mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}(\zeta^n)$ ist die Einschränkungsabbildung

$$\Gamma : \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_{nm}|\mathbb{Q}_n) \to \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_m|\mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m)$$

ein wohldefinierter Homomorphismus. Sei $\gamma \in \operatorname{Ker}(\Gamma)$. Wegen $\operatorname{ggT}(n,m) = 1$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $1 = an + bm$. Dann ist $\gamma(\zeta) = \gamma(\zeta^{an+bm}) = \gamma(\zeta^n)^a \gamma(\zeta^m)^b = \zeta^{na}\zeta^{mb} = \zeta$. Also ist Γ injektiv und

$$\varphi(m) = \frac{\varphi(nm)}{\varphi(n)} = \frac{[\mathbb{Q}_{nm} : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}_n : \mathbb{Q}]} = [\mathbb{Q}_{nm} : \mathbb{Q}_n] = |\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_{nm}|\mathbb{Q}_n)| \leq |\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_m|\mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m)| \leq \varphi(m).$$

Der Hauptsatz der Galoistheorie impliziert die Behauptung. □

Lemma 10.13. *Sei χ ein treuer p-rationaler Charakter von G, wobei $p \mid |G|$. Dann ist $\chi(1) \geq p - 1$.*

Beweis. O. B. d. A. sei $p \geq 3$. Wir schreiben $|G| = mp^a$ mit $p \nmid m$. Nach Voraussetzung ist $\chi(g) \in \mathbb{Q}_m$ für alle $g \in G$. Sei $P \leq G$ mit $|P| = p$. Dann hat χ_P Werte in $\mathbb{Q}_p$. Nach Lemma 10.12 ist also $\chi(x) \in \mathbb{Q}$ für $x \in P$. Da χ treu ist, enthält χ_P einen nichttrivialen Bestandteil $\psi \in \operatorname{Irr}(P)$. Für $1 \neq \gamma \in \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_p|\mathbb{Q})$ ist ${}^{\gamma}\psi \neq \psi$ ein irreduzibler Bestandteil von ${}^{\gamma}(\chi_P) = \chi_P$. Wegen $|\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_p|\mathbb{Q})| = p - 1$ besitzt χ_P also mindestens $p - 1$ irreduzible Bestandteile. Dies zeigt die Behauptung. □

Lemma 10.14 (Frattini Argument). *Sei $N \trianglelefteq G$ und $P \in \operatorname{Syl}_p(N)$. Dann ist $G = N\,\mathrm{N}_G(P)$.*

Beweis. Für $g \in G$ ist $gPg^{-1} \le gNg^{-1} = N$. Nach Sylow existiert ein $x \in N$ mit $gPg^{-1} = xPx^{-1}$. Also ist $g = x(x^{-1}g) \in N\,\mathrm{N}_G(P)$. $\square$

Lemma 10.15. *Sei G abelsch und $p \mid |G|$. Dann existiert eine Untergruppe $H \le G$ mit $|G : H| = p$.*

Beweis. Da G das direkte Produkt seiner Sylowgruppen ist, können wir annehmen, dass G eine p-Gruppe ist. Im Fall $|G| = p$ können wir $H = 1$ wählen. Sei nun $|G| > p$, und sei $x \in G$ ein Element der Ordnung p. Nach Induktion besitzt $G/\langle x\rangle$ eine Untergruppe $H/\langle x\rangle$ mit $|G : H| = |G/\langle x\rangle : H/\langle x\rangle| = p$. $\square$

Satz 10.16 (Blichfeldt). *Eine endliche Gruppe $G \le \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ besitzt eine abelsche π-Hallgruppe für $\pi := \{p \in \mathbb{P} : p > n + 1\}$.*

Beweis. Wir argumentieren durch Doppelinduktion nach n und dann nach $|G|$. Im Fall $n = 1$ ist G abelsch und die Behauptung folgt aus Beispiel 10.8(ii). Sei also $n \ge 2$. Sei χ der treue Charakter vom Grad n, der durch die Einbettung $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ entsteht.

Behauptung: Jede π-Untergruppe $H \le G$ ist abelsch.
Sei ψ ein irreduzibler Bestandteil von χ_H. Dann ist $\psi(1) \mid |H|$. Jeder Primteiler p von $\psi(1)$ erfüllt also $n + 1 < p \le \psi(1) \le \chi(1) = n$. Folglich ist $\psi(1) = 1$. Also ist χ_H eine Summe von irreduziblen Charakteren $\psi_1, \ldots, \psi_k$ vom Grad 1. Somit ist $H' \subseteq \operatorname{Ker}(\psi_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ker}(\psi_k) = \operatorname{Ker}(\chi_H) = \operatorname{Ker}(\chi) \cap H = 1$ (siehe Aufgabe 9) und H ist abelsch.

Es genügt daher zu zeigen, dass irgendeine π-Hallgruppe existiert.

Behauptung: $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$.
Sei χ reduzibel und $\chi = \chi_1 + \chi_2$ mit $K_i := \operatorname{Ker}(\chi_i)$ für $i = 1, 2$. Dann ist $G/K_i \le \mathrm{GL}(\chi_i(1), \mathbb{C})$ mit $\chi_i(1) < n$. Nach Induktion besitzt G/K_i abelsche π_i-Hallgruppen mit $\pi_i := \{p \in \mathbb{P} : p > \chi_i(1) + 1\}$ für $i = 1, 2$. Wegen $\pi \subseteq \pi_i$ gibt es auch π-Hallgruppen H_i/K_i von G/K_i für $i = 1, 2$ (Beispiel 10.8(ii)). Gilt $H_i < G$ für ein i, so existiert nach Induktion eine π-Hallgruppe H von H_i. Für alle $p \in \pi$ ist dann $p \nmid |G/K_i : H_i/K_i||H_i : H| = |G : H_i||H_i : H| = |G : H|$. Wir können daher $H_i = G$ für $i = 1, 2$ annehmen. Insbesondere ist G/K_i abelsch. Wegen $K_1 \cap K_2 = \operatorname{Ker}(\chi_1) \cap \operatorname{Ker}(\chi_2) = \operatorname{Ker}(\chi) = 1$ ist die Abbildung $G \to G/K_1 \times G/K_2$, $g \mapsto (gK_1, gK_2)$ injektiv. Insbesondere ist auch G abelsch und die Behauptung folgt aus Beispiel 10.8(ii).

Behauptung: $G' = G$.
Sei $G' < G$. Nach Lemma 10.15 existiert ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $|G : N| = p \in \mathbb{P}$ (denn G/G' ist abelsch). Nach Induktion besitzt N eine π-Hallgruppe H. Im Fall $p \notin \pi$ ist H auch eine π-Hallgruppe von G. Sei also $p \in \pi$. Im Fall $H \trianglelefteq G$ ist HP eine π-Hallgruppe von G, wobei $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$. Sei also $H \ntrianglelefteq G$. Dann existiert eine Sylowgruppe Q von H mit $Q \ntrianglelefteq G$ (anderenfalls wäre H als Produkt von Normalteilern auch normal). Dann ist Q auch eine Sylowgruppe von N und das Frattini Argument zeigt $G = N\,\mathrm{N}_G(Q)$. Da H abelsch ist, gilt $H \subseteq \mathrm{N}_G(Q)$. Außerdem ist

$$|G : \mathrm{N}_G(Q)| = |N\,\mathrm{N}_G(Q) : \mathrm{N}_G(Q)| = |N : N \cap \mathrm{N}_G(Q)| = |N : \mathrm{N}_N(Q)| \mid |N : H|.$$

Insbesondere liegen die Primteiler von $|G : \mathrm{N}_G(Q)|$ nicht in π. Wegen $\mathrm{N}_G(Q) < G$ besitzt $\mathrm{N}_G(Q)$ eine π-Hallgruppe K. Offenbar ist dann K auch eine π-Hallgruppe von G und wir sind fertig.

Behauptung: $\mathrm{Z}(G)$ ist eine π'-Gruppe.
Sei $Z \le \mathrm{Z}(G)$ mit $|Z| = p \in \pi$. Nach Satz 2.14 ist $Z \subseteq \mathrm{Z}(\chi)$. Sei Δ eine Darstellung mit Charakter

χ. Für $1 \neq x \in Z$ ist dann $\Delta(x) = \lambda 1_n$ für eine p-te Einheitswurzel $\lambda \neq 1$. Wegen $p > n$ ist $\det(\Delta(x)) = \lambda^n \neq 1$. Also ist $\det \Delta \neq 1_G$ im Widerspruch zu $G' = G$.

Sei nun $H \leq G$ eine π-Untergruppe von maximaler Ordnung.

Behauptung: $\mathrm{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$.
Sei $1 \neq x \in H$ ein p-Element. Da $\mathrm{Z}(H)$ eine π'-Gruppe ist, gilt $C := \mathrm{C}_G(x) < G$. Nach Induktion besitzt C eine π-Hallgruppe K. Da H abelsch ist (siehe oben), gilt $H \subseteq C$ und somit $|H| \leq |K|$. Aus der Maximalität von H folgt $|H| = |K|$. Sei $x \in P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Da P als π-Untergruppe abelsch ist, gilt $P \leq C$ und $p \nmid |G : C|$. Andererseits ist $p \nmid |C : K| = |C : H|$ und $p \nmid |G : C||C : H| = |G : H|$.

Wir dürfen annehmen, dass G mindestens ein π-Element besitzt, d. h. $H \neq 1$ (anderenfalls ist G eine π'-Gruppe und die Behauptung gilt mit $H = 1$). Sei also p ein Primteiler von $|H|$. Wir nehmen an, dass H keine π-Hallgruppe ist. Also existiert ein $q \in \pi$ mit $q \mid |G : H|$.

Behauptung: G besitzt kein Element der Ordnung pq.
Anderenfalls existieren $x, y \in G$ mit $|\langle x \rangle| = p$, $|\langle y \rangle| = q$ und $y \in \mathrm{C}_G(x)$. Nach Sylow dürfen wir $x \in H$ annehmen. Mit den obigen Bezeichnungen ist $y \in C$, $q \mid |C|$ und daher $q \mid |K| = |H|$. Dies widerspricht $\mathrm{ggT}(|H|, |G : H|) = 1$.

Nach Lemma 10.11 ist χ r-rational für ein $r \in \{p, q\}$. Lemma 10.13 impliziert nun $n = \chi(1) \geq r - 1$ im Widerspruch zu $r \in \pi$. □

Satz 10.17 (Wielandt). *Für $\pi \subseteq \mathbb{P}$ sind je zwei abelsche π-Hallgruppen von G konjugiert.*

Beweis. Seien $A, B \leq G$ abelsche π-Hallgruppen. Wir argumentieren durch Induktion nach $|\pi|$. Im Fall $|\pi| \leq 1$ folgt die Behauptung aus dem Satz von Sylow. Sei $|\pi| \geq 2$. Wir schreiben $A = \prod_{p \in \pi} S_p$ und $B = \prod_{p \in \pi} T_p$ mit $S_p, T_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Sei $q \in \pi$ fest. Nach Induktion existiert ein $g \in G$ mit

$$g\Big(\prod_{q \neq p \in \pi} S_p\Big)g^{-1} = \prod_{q \neq p \in \pi} T_p.$$

Ersetzt man A durch gAg^{-1}, so kann man $S_p = T_p$ für alle $p \neq q$ annehmen. Offenbar ist dann $S_q, T_q \in \mathrm{Syl}_q(\mathrm{N}_G(\prod_{q \neq p \in \pi} S_p))$. Nach Sylow existiert ein $h \in \mathrm{N}_G(\prod_{q \neq p \in \pi} S_p)$ mit $hS_qh^{-1} = T_q$. Dann ist

$$hAh^{-1} = hS_qh^{-1}h\Big(\prod_{q \neq p \in \pi} S_p\Big)h^{-1} = T_q \prod_{q \neq p \in \pi} S_p = B.$$ □

Beispiel 10.18. Im Allgemeinen sind zwei π-Hallgruppen von G nicht konjugiert. Sei zum Beispiel $G := \mathrm{GL}(3, 2)$ und

$$H := \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \mathrm{GL}(2,2) \end{pmatrix} \leq G, \qquad K := \begin{pmatrix} \mathrm{GL}(2,2) & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq G.$$

Wegen $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ und $|H| = |K| = 24$ sind H und K $\{2,3\}$-Hallgruppen von G. Nehmen wir an, dass ein $g \in G$ mit $gHg^{-1} = K$ existiert. Sei $e_1 := (1, 0, 0)$ und $g \cdot e_1 = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{F}_2^3$. Für alle $x \in K$ ist dann

$$x(\alpha, \beta, \gamma) = g\,\underbrace{(g^{-1}xg)}_{\in H}\,e_1 = g \cdot e_1 = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Mit $\left(\begin{smallmatrix} 1&1&0\\0&1&1\\0&0&1 \end{smallmatrix}\right) \in K$ folgt $\beta = \gamma = 0$. Aus $\left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{smallmatrix}\right) \in K$ folgt nun der Widerspruch $\alpha = 0$. Somit sind H und K nicht in G konjugiert.

Satz 10.19 (Brauer-Burnside)**.** *Sei θ ein treuer Charakter von G, der genau r verschiedene Werte $a_1, \ldots, a_r$ annimmt. Dann tritt unter den irreduziblen Bestandteilen von $\theta^0 = 1_G, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{r-1}$ jeder irreduzible Charakter von G auf.*

Beweis. Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ kein irreduzibler Bestandteil von $\theta^0, \theta, \ldots, \theta^{r-1}$, und sei $A_j := \{g \in G : \theta(g) = a_j\}$ für $j = 1, \ldots, r$. Dann ist

$$0 = |G|(\theta^s, \chi)_G = \sum_{g \in G} \theta^s(g)\chi(g^{-1}) = \sum_{j=1}^{r} a_j^s \sum_{g \in A_j} \chi(g^{-1})$$

für $s = 0, \ldots, r-1$. Daher ist $\left(\sum_{g \in A_1} \chi(g^{-1}), \ldots, \sum_{g \in A_r} \chi(g^{-1})\right)$ eine Lösung des homogenen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{r-1} & a_2^{r-1} & \cdots & a_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

Matrizen dieser Form (Vandermonde-Matrix) sind bekanntlich invertierbar. Folglich ist $\sum_{g \in A_j} \chi(g^{-1}) = 0$ für $j = 1, \ldots, r$. Sei $j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $1 \in A_j$, also $a_j = \theta(1)$. Da θ treu ist, ist $A_j = \{1\}$, und man hat den Widerspruch $\chi(1) = 0$. $\square$

Beispiel 10.20. Für den regulären Charakter θ von G gilt $r = 2$ in Satz 10.19 (falls $G \neq 1$). Tatsächlich wissen wir bereits, dass jeder irreduzible Charakter in $\theta = \theta^{r-1}$ vorkommt.

11 Die Charaktere von S_n und A_n

Bemerkung 11.1.

(i) Nach Aufgabe 27 sind zwei Elemente in S_n genau dann konjugiert, wenn sie den gleichen Zyklentyp haben. Folglich kann man die Menge der Konjugationsklassen mit den Partitionen von n identifizieren. Dabei ist eine *Partition* von n eine Folge von natürlichen Zahlen $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$ und $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = n$.

(ii) Im Folgenden werden wir die Charaktertafel von S_n berechnen, indem wir auch die irreduziblen Charaktere mit den Partitionen identifizieren. Nach Aufgabe 27 ist dies eine ganzzahlige Matrix.

Definition 11.2.

(i) Sei $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ eine Partition von n. Das *Young-Diagramm* von λ ist eine Anordnung von n Boxen mit λ_i Boxen in der i-ten Zeile. Durch Spiegelung an der Diagonalen erhält man das *entgegengesetzte* Young-Diagramm mit Partition $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_l)$ mit $\lambda'_i := |\{j : \lambda_j \geq i\}|$ für $i = 1, \ldots, l$. Sicher ist $\lambda'' = \lambda$ (vgl. Beispiel 11.3).

(ii) Ein *Young-Tableau* (von λ) ist ein mit den Zahlen $1, \ldots, n$ ausgefülltes Young-Diagramm (von λ), wobei in jeder Zeile die Zahlen aufsteigend sortiert sind.

Beispiel 11.3. Sei $\lambda = (4, 2, 2, 1) = (4, 2^2, 1)$ eine Partition von 9. Dann sind das Young-Diagramm von λ, ein Young-Tableau und das entgegengesetzte Young-Diagramm gegeben durch:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
 & & & \\
\hline
 & \\
\cline{1-2}
 & \\
\cline{1-2}
 \\
\cline{1-1}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
2 & 3 & 6 & 7 \\
\hline
1 & 8 \\
\cline{1-2}
5 & 9 \\
\cline{1-2}
4 \\
\cline{1-1}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
 & & & \\
\hline
 & & \\
\cline{1-3}
 \\
\cline{1-1}
 \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

Bemerkung 11.4.

(i) Wir werden die Young-Tableaus Y von $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ oft mit den Mengenpartitionen $Y = (Y_1, \ldots, Y_k)$ mit $Y_1 \cup \ldots \cup Y_k = \{1, \ldots, n\}$ und $|Y_i| = \lambda_i$ für $i = 1, \ldots, k$ identifizieren. Offenbar operiert dann S_n durch ${}^gY := (g(Y_1), \ldots, g(Y_k))$ transitiv auf der Menge der Young-Tableaus von λ. Sei φ_λ der entsprechende Permutationscharakter (siehe Aufgabe 29). Der Stabilisator von Y ist gegeben durch die *Young-Untergruppe*

$$S_Y := (S_n)_Y = \mathrm{Sym}(Y_1) \times \ldots \times \mathrm{Sym}(Y_k) \cong S_{\lambda_1} \times \ldots \times S_{\lambda_k}.$$

Nach Aufgabe 29 ist $\boxed{\varphi_\lambda = 1_{S_Y}^{S_n}}$. Sei sgn der alternierende Charakter von S_n (siehe Beispiel 1.2). Wir setzen $\boxed{\psi_\lambda := \mathrm{sgn} \cdot \varphi_\lambda = (\mathrm{sgn}_{S_Y} \cdot 1_{S_Y})^{S_n} = (\mathrm{sgn}_{S_Y})^{S_n}}$.

(ii) Sei $Y' = (Y_1', \ldots, Y_l')$ das zu Y gespiegelte Young-Tableau (als Mengenpartition). Dann ist $|Y_i \cap Y_j'| \le 1$ für alle i, j (Schnitt von Zeile und Spalte). Dies zeigt $S_Y \cap S_{Y'} = 1$.

Beispiel 11.5.

(i) Für $\lambda = (n)$ ist $S_Y = S_n$, $\varphi_\lambda = 1_{S_n}$ und $\psi_\lambda = \mathrm{sgn}$.

(ii) Für $\lambda = (1^n)$ ist $S_Y = 1$, und $\varphi_\lambda = 1_1^{S_n} = (\mathrm{sgn}_1)^{S_n} = \psi_\lambda$ ist der reguläre Charakter von S_n.

(iii) Für $\lambda = (n-1, 1)$ kann man die Menge der Young-Tableaus mit $\{1, \ldots, n\}$ identifizieren. Also ist φ_λ der natürliche Permutationscharakter vom Grad n (Aufgabe 29).

Satz 11.6. *Für jede Partition λ von n ist $(\varphi_\lambda, \psi_{\lambda'})_{S_n} = 1$. Insbesondere gibt es genau einen gemeinsamen irreduziblen Bestandteil χ_λ von φ_λ und $\psi_{\lambda'}$.*

Beweis. Sei Y ein Young-Tableau von λ. Nach Frobenius und Mackey ist

$$\begin{aligned}
(\varphi_\lambda, \psi_{\lambda'})_{S_n} &= (1_{S_Y}^{S_n}, (\mathrm{sgn}_{S_{Y'}})^{S_n})_{S_n} = ((1_{S_Y}^{S_n})_{S_{Y'}}, \mathrm{sgn}_{S_{Y'}})_{S_{Y'}} \\
&= \sum_{S_{Y'} g S_Y \in S_{Y'} \backslash S_n / S_Y} (1_{S_{Y'} \cap g S_Y g^{-1}}^{S_{Y'}}, \mathrm{sgn}_{S_{Y'}})_{S_{Y'}} = \sum_{S_{Y'} g S_Y \in S_{Y'} \backslash S_n / S_Y} (1_{D_g}, \mathrm{sgn}_{D_g})_{D_g}
\end{aligned} \tag{11.1}$$

mit $D_g := S_{Y'} \cap g S_Y g^{-1} = S_{Y'} \cap S_{{}^gY}$. Für $g = 1$ ist $D_g = 1$ und $(1_{D_g}, \mathrm{sgn}_{D_g})_{D_g} = 1$ nach Bemerkung 11.4(ii). Wir müssen zeigen, dass alle anderen Summanden in (11.1) verschwinden. Sei also $(1_{D_g}, \mathrm{sgn}_{D_g})_{D_g} > 0$ für ein $g \in S_n$. Angenommen zwei Zahlen a, b liegen in der gleichen Zeile von ${}^gY$ und in der gleichen Spalte von Y. Dann wäre die Transposition (a, b) in D_g und $1_{D_g} \ne \mathrm{sgn}_{D_g}$. Daher verteilen sich die Zahlen einer Zeile von ${}^gY$ auf paarweise verschiedene Spalten von Y. Insbesondere existiert ein $h_1 \in S_{Y'}$, sodass die ersten Zeilen von ${}^gY$ und ${}^{h_1}Y$ als Mengen übereinstimmen. Analog existiert $h_2 \in S_{Y'}$, sodass die ersten beiden Zeilen von ${}^gY$ und ${}^{h_2 h_1}Y$ übereinstimmen usw. Schließlich existiert $h \in S_{Y'}$ mit ${}^gY = {}^hY$, d. h. $h^{-1}g \in S_Y$. Dies zeigt $S_{Y'} g S_Y = S_{Y'} S_Y$ und wir sind fertig. $\square$

Definition 11.7. Sei $\leq$ die lexikografische Ordnung auf der Menge der Partitionen von n, d. h.

$$\lambda < \mu \;:\Longleftrightarrow\; \exists k : \lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_{k-1} = \mu_{k-1}, \lambda_k < \mu_k.$$

Satz 11.8 (Frobenius-Young). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\operatorname{Irr}(S_n) = \{\chi_\lambda : \lambda$ Partition von $n\}$.*

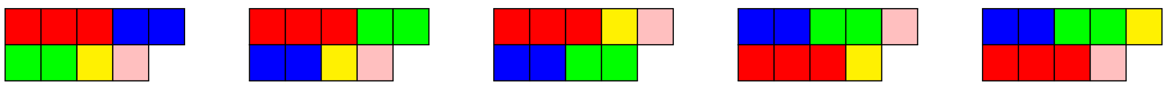
Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die χ_λ paarweise verschieden sind. Sei also $\chi_\lambda = \chi_\mu$ für Partitionen $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ und $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ von n. Nach Definition ist $(\varphi_\lambda, \psi_{\mu'})_{S_n} \neq 0$. Seien Y und Z Young-Tableaus von λ bzw. μ. Wie im Beweis von Satz 11.6 existiert ein $g \in S_n$ mit $S_{Z'} \cap S_{{}^gY} = 1$. Ersetzt man Y durch ${}^gY$, so kann man $g = 1$ annehmen. Mit $Y = (Y_1, \ldots, Y_k)$ und $Z' = (Z'_1, \ldots, Z'_m)$ gilt also $|Y_i \cap Z'_j| \leq 1$. Wir wollen $\lambda \leq \mu$ zeigen. Es gilt $\lambda_1 = |Y_1| \leq m = \mu_1$. Nehmen wir nun an, dass $\lambda_j = \mu_j$ für $j \leq i$ gilt. Man kann dann die ersten i Zeilen von Y genau auf die ersten i Spalten von Z' verteilen. Wegen $Y_{i+1} \subseteq \{1, \ldots, n\} = Z'_1 \cup \ldots \cup Z'_m$ hat Z' also mindestens $|Y_{i+1}| = \lambda_{i+1}$ Zeilen mit mindestens $i + 1$ Boxen, d. h. $\mu_{i+1} = |\{j : |Z'_j| \geq i + 1\}| \geq \lambda_{i+1}$. Dies zeigt $\lambda \leq \mu$. Wegen $(\varphi_\mu, \psi_{\lambda'})_{S_n} \neq 0$ gilt analog auch $\mu \leq \lambda$ und wir sind fertig. $\square$

Lemma 11.9. *Für eine Partition λ ist $\varphi_\lambda = \sum_{\mu \geq \lambda} (\varphi_\lambda, \chi_\mu)_{S_n} \chi_\mu$.*

Beweis. Sei $(\varphi_\lambda, \chi_\mu)_{S_n} \neq 0$ für eine Partition μ. Dann ist auch $(\varphi_\lambda, \psi_{\mu'})_{S_n} \neq 0$ und wie im Beweis von Satz 11.8 folgt $\lambda \leq \mu$. $\square$

Lemma 11.10. *Seien λ und μ Partitionen von n. Für ein Element $g \in S_n$ vom Zyklentyp μ ist dann $\varphi_\lambda(g)$ die Anzahl der Möglichkeiten die Komponenten von μ auf die Komponenten von λ zu verteilen.*

Beispiel 11.11. Sei $\lambda = (5, 4)$ und $\mu = (3, 2^2, 1^2)$. Dann ist $\varphi_\lambda(g) = 5$, veranschaulicht durch eingefärbte Young-Diagramme:



Beweis von Lemma 11.10. Sei $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ und $g = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ mit disjunkten Zyklen σ_i der Länge μ_i für $i = 1, \ldots, k$. Nach Aufgabe 29 ist $\varphi_\lambda(g)$ die Anzahl der Young-Tableaus von λ, die durch g festbleiben. Ein Young-Tableau Y von λ bleibt genau dann unter g fest, wenn für $i = 1, \ldots, k$ die nichttriviale Bahn von σ_i in einem Y_j liegt. Für Y gibt es daher genau so viele Möglichkeiten wie es Möglichkeiten gibt, die μ_i in das Young-Diagramm von λ zu verteilen. $\square$

Bemerkung 11.12. Lemma 11.9 und Lemma 11.10 erlauben es $\operatorname{Irr}(S_n)$ rekursiv zu berechnen. Nach Beispiel 11.5 ist $\chi_{(n)} = \varphi_{(n)} = 1_{S_n}$. Nehmen wir an, dass χ_μ für $\mu > \lambda$ bekannt ist. Da χ_λ nur einmal in φ_λ auftritt, ist $\chi_\lambda = \varphi_\lambda - \sum_{\mu > \lambda} (\varphi_\lambda, \chi_\mu)_{S_n} \chi_\mu$. Nach Aufgabe 29 ist außerdem $(\varphi_\lambda, \chi_{(n)})_{S_n} = 1$. Insbesondere ist $\chi_{(n-1,1)} = \varphi_{(n-1,1)} - 1_{S_n}$.

Lemma 11.13. *Für jede Partition λ von n gilt $\chi_{\lambda'} = \operatorname{sgn} \cdot \chi_\lambda$.*

Beweis. Nach Aufgabe 6 ist $\operatorname{sgn} \cdot \chi_\lambda$ ein irreduzibler Bestandteil von $\operatorname{sgn} \cdot \varphi_\lambda = \psi_\lambda = \psi_{\lambda''}$ und von $\operatorname{sgn} \cdot \psi_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'}$. $\square$

Beispiel 11.14. Sei $n = 5$. Die Partitionen von 5 in absteigender Reihenfolge sind (5), $(4,1)$, $(3,2)$, $(3,1^2)$, $(2^2,1)$, $(2,1^3)$, (1^5). Wegen Lemma 11.13 brauchen wir φ_λ nur für drei Partitionen zu berechnen:

g	(1^5)	$(2,1^3)$	$(2^2,1)$	$(3,1^2)$	$(3,2)$	$(4,1)$	(5)
$\lvert S_5 : \mathrm{C}_{S_5}(g)\rvert$	1	10	15	20	20	30	24
$\varphi_{(4,1)}$	5	3	1	2	.	1	.
$\varphi_{(3,2)}$	10	4	2	1	1	.	.
$\varphi_{(3,1^2)}$	20	6	.	2	.	.	.

Die zweite Zeile enthält dabei die Längen der Konjugationsklassen und Nullen werden durch Punkte gekennzeichnet. Nun ist $\chi_{(5)} = 1_{S_5}$. Aus Bemerkung 11.12 ergibt sich $\chi_{(4,1)} = \varphi_{(4,1)} - 1_{S_5}$. Weiter ist $(\varphi_{(3,2)}, \chi_{(4,1)})_{S_5} = 1$ und $\chi_{(3,2)} = \varphi_{(3,2)} - 1_{S_n} - \chi_{(4,1)}$. Schließlich ist $(\varphi_{(3,1^2)}, \chi_{(3,2)})_{S_5} = 1$ und $(\varphi_{(3,1^2)}, \chi_{(4,1)})_{S_5} = 2$. Also ist $\chi_{(3,1^2)} = \varphi_{(3,1^2)} - 1_{S_5} - \chi_{(3,2)} - 2\chi_{(4,1)}$.

S_5	(1^5)	$(2,1^3)$	$(2^2,1)$	$(3,1^2)$	$(3,2)$	$(4,1)$	(5)
(5)	1	1	1	1	1	1	1
$(4,1)$	4	2	.	1	-1	.	-1
$(3,2)$	5	1	1	-1	1	-1	.
$(3,1^2)$	6	.	-2	.	.	.	1
$(2^2,1)$	5	-1	1	-1	-1	1	.
$(2,1^3)$	4	-2	.	1	1	.	-1
(1^5)	1	-1	1	1	-1	-1	1

Bemerkung 11.15.

(i) Sei λ eine Partition von n mit Young-Diagramm Y. Für eine Box $b := (i,j)$ von Y ist der *Haken* $H(b)$ von b die Vereinigung der Boxen (i,j), $(i,j+1)$, $\ldots$ und der Boxen $(i+1,j)$, $(i+2,j)$, $\ldots$. Sei $h(b) := |H(b)| = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$. Wir können die $h(b)$ in das Young-Diagramm schreiben, zum Beispiel:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 7 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 2 \\ \cline{1-2} 3 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Es gilt die *Hakenformel*:

$$\chi_\lambda(1) = \frac{n!}{\prod\limits_{b \text{ Box von } Y} h(b)}$$

(ohne Beweis). Für obiges Tableau ergibt sich $\chi_\lambda(1) = 216$.

(ii) Entfernt man den Haken $H(b)$ aus Y, so erhält man das Young-Diagramm einer Partition $\lambda \setminus H(b)$ von $n - h(b)$. Weiterhin nennt man $l(b) := \lambda'_j - i$ die *Beinlänge* von b. Sei nun $x \in S_n$ vom Typ $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ und $y \in S_{n-\mu_k}$ vom Typ $(\mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_l)$. Dann gilt die *Murnaghan-Nakayama-Formel*

$$\chi_\lambda(x) = \sum_{\substack{b \text{ Box von } Y,\\ h(b)=\mu_k}} (-1)^{l(b)} \chi_{\lambda \setminus H(b)}(y)$$

(ohne Beweis). Im Fall $\mu_k = n$ betrachtet man dabei $\chi_{\lambda \setminus H(b)}$ als trivialen Charakter auf der trivialen Gruppe $S_0 = \mathrm{Sym}(\varnothing)$. Für $\mu_k = 1$ erhält man die *Verzweigungsregel*

$$(\chi_\lambda)_{S_{n-1}} = \sum_{\substack{b \text{ Box von } Y,\\ h(b)=1}} \chi_{\lambda \setminus H(b)}$$

(ohne Beweis).

(iii) Im Folgenden werden wir $\mathrm{Irr}(A_n)$ aus $\mathrm{Irr}(S_n)$ konstruieren und dabei annehmen, dass $\mathrm{Irr}(S_n)$ gegeben ist. O. B. d. A. sei stets $n \ge 3$.

(iv) Sei $\sigma = (a_1, \ldots, a_m) \in S_n$ ein Zyklus der Länge m. Dann ist $\sigma = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \ldots (a_{m-1}, a_m)$ und $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{m-1}$. Ist $g \in S_n$ ein beliebiges Element vom Zyklentyp $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, so ist also $\mathrm{sgn}(g) = (-1)^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_k - k} = (-1)^{n-k}$.

Satz 11.16. *Sei $g \in K \in \mathrm{Cl}(A_n)$ ein Element vom Zyklentyp $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Genau dann ist $K \notin \mathrm{Cl}(S_n)$, wenn die λ_i ungerade und paarweise verschieden sind. Gegebenenfalls ist ${}^{(1,2)}K \in \mathrm{Cl}(A_n)$ und $K \mathbin{\dot\cup} {}^{(1,2)}K \in \mathrm{Cl}(S_n)$.*

Beweis. Es gilt $K \in \mathrm{Cl}(S_n)$ genau dann, wenn $|A_n : \mathrm{C}_{A_n}(g)| = |K| = |S_n : \mathrm{C}_{S_n}(g)|$. Wegen $|A_n : \mathrm{C}_{A_n}(g)| = |A_n : A_n \cap \mathrm{C}_{S_n}(g)| = |A_n \mathrm{C}_{S_n}(g) : \mathrm{C}_{S_n}(g)|$ ergibt sich

$$K \notin \mathrm{Cl}(S_n) \iff \mathrm{C}_{S_n}(g) \subseteq A_n.$$

Sei $g = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ mit disjunkten Zyklen σ_i der Länge λ_i. Nehmen wir zunächst an, dass ein λ_i gerade ist. Dann ist $\sigma_i \in \mathrm{C}_{S_n}(g) \setminus A_n$. Also können wir annehmen, dass alle λ_i ungerade sind. Setzen wir als Nächstes voraus, dass die λ_i nicht paarweise verschieden sind, also o. B. d. A. $\lambda_1 = \lambda_2$. Wir schreiben $\sigma_1 = (a_1, \ldots, a_{\lambda_1})$ und $\sigma_2 = (b_1, \ldots, b_{\lambda_1})$. Dann ist $\tau := (a_1, b_1)(a_2, b_2) \ldots (a_{\lambda_1}, b_{\lambda_1}) \notin A_n$. Außerdem ist $\tau\sigma_1\tau = \sigma_2$, $\tau\sigma_2\tau = \sigma_1$ und $\tau\sigma_i\tau = \sigma_i$ für alle $i \ge 3$. Dies zeigt $\tau \in \mathrm{C}_{S_n}(g) \setminus A_n$.

Seien nun umgekehrt die λ_i ungerade und paarweise verschieden. Wir berechnen $|S_n : \mathrm{C}_{S_n}(g)|$, indem wir die Möglichkeiten für g zählen (d. h. die Elemente vom Zyklentyp $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$). Für die λ_1 Elemente des Zyklus' σ_1 gibt es $\frac{n!}{(n-\lambda_1)!}$ Möglichkeiten. Davon liefern allerdings je λ_1 Möglichkeiten das gleiche Element. Also gibt es $\frac{n!}{\lambda_1(n-\lambda_1)!}$ Möglichkeiten für σ_1. Analog gibt es danach noch $\frac{(n-\lambda_1)!}{\lambda_2(n-\lambda_1-\lambda_2)!}$ Möglichkeiten für σ_2 usw. Dies zeigt

$$|S_n : \mathrm{C}_{S_n}(g)| = \frac{n!(n-\lambda_1)!(n-\lambda_1-\lambda_2)! \ldots (n-\lambda_1-\ldots-\lambda_{k-1})!}{\lambda_1 \ldots \lambda_k (n-\lambda_1)!(n-\lambda_1-\lambda_2)! \ldots (\underbrace{n-\lambda_1-\ldots-\lambda_k}_{=0})!} = \frac{n!}{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$$

und $|\mathrm{C}_{S_n}(g)| = \lambda_1 \ldots \lambda_k$. Offenbar ist $\langle\sigma_1\rangle \ldots \langle\sigma_k\rangle \subseteq \mathrm{C}_{S_n}(g)$ und $|\langle\sigma_1\rangle \ldots \langle\sigma_k\rangle| = |\langle\sigma_1\rangle| \ldots |\langle\sigma_k\rangle| = \lambda_1 \ldots \lambda_k$. Also ist $\mathrm{C}_{S_n}(g) = \langle\sigma_1\rangle \ldots \langle\sigma_k\rangle \subseteq A_n$. Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Sei nun $K \notin \mathrm{Cl}(S_n)$. Wie üblich ist ${}^{(1,2)}K \in \mathrm{Cl}(A_n)$. Sei $K \subseteq \widetilde{K} \in \mathrm{Cl}(S_n)$. Dann ist sicher $K \cup {}^{(1,2)}K \subseteq \widetilde{K}$. Für jedes $h \in \widetilde{K}$ existiert umgekehrt ein $x \in S_n$ mit $h = xgx^{-1}$. Ist $x \in A_n$, so ist $h \in K$. Anderenfalls ist $(1,2)x \in A_n$ und $h = (1,2)\big((1,2)xgx^{-1}(1,2)\big)(1,2) \in {}^{(1,2)}K$. Dies zeigt $\widetilde{K} = K \mathbin{\dot\cup} {}^{(1,2)}K$. $\square$

Beispiel 11.17. Für $n \ge 3$ gibt es stets ein $K \in \mathrm{Cl}(A_n)$ mit $K \notin \mathrm{Cl}(S_n)$. Für ungerades n kann man nämlich Zyklentyp (n) in Satz 11.16 wählen und für gerades n Zyklentyp $(n-1, 1)$.

Satz 11.18. *Sei $\chi := \chi_\lambda \in \mathrm{Irr}(S_n)$ für eine Partition λ von n. Im Fall $\lambda \neq \lambda'$ ist $\chi_{A_n} \in \mathrm{Irr}(A_n)$ und im Fall $\lambda = \lambda'$ ist $\chi_{A_n} = \xi_\lambda + {}^{(1,2)}\xi_\lambda$ mit $\xi_\lambda \in \mathrm{Irr}(A_n)$ und $\xi_\lambda \neq {}^{(1,2)}\xi_\lambda$. Auf diese Weise tritt jeder irreduzible Charakter von A_n auf.*

Beweis. Es gilt

$$(\chi,\chi)_{S_n} + (\chi,\operatorname{sgn}\cdot\chi)_{S_n} = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n}\chi(g)^2 + \operatorname{sgn}(g)\chi(g)^2 = \frac{2}{n!}\sum_{g\in A_n}\chi(g)^2 = (\chi_{A_n},\chi_{A_n})_{A_n}.$$

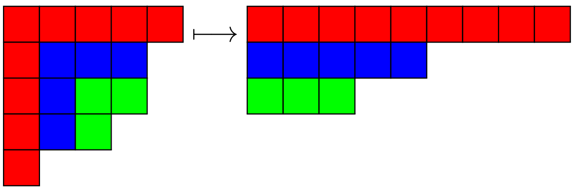
Im Fall $\lambda \neq \lambda'$ ist $\operatorname{sgn}\cdot\chi = \chi_{\lambda'} \neq \chi$ und $(\chi_{A_n},\chi_{A_n})_{A_n} = 1$, d. h. $\chi_{A_n} \in \operatorname{Irr}(A_n)$.

Sei nun $\lambda = \lambda'$. Dann ergibt sich $(\chi_{A_n},\chi_{A_n})_{A_n} = 2$ und χ_{A_n} ist die Summe zweier verschiedener irreduzibler Charaktere von A_n. Aus Satz 4.11 folgt also $\chi_{A_n} = \xi_\lambda + {}^{(1,2)}\xi_\lambda$ für ein $\xi_\lambda \in \operatorname{Irr}(A_n)$.

Sei schließlich $\xi \in \operatorname{Irr}(A_n)$ beliebig. Dann ist $(\chi_{A_n},\xi)_{A_n} = (\chi,\xi^{S_n})_{S_n} \neq 0$ für ein $\chi \in \operatorname{Irr}(S_n)$. Also entsteht ξ auf obige Weise. □

Bemerkung 11.19. Wie üblich operiert $\langle(1,2)\rangle$ auf $\operatorname{Irr}(A_n)$ und auf $\operatorname{Cl}(A_n)$. Nach Brauers Permutationslemma gibt es genau so viele Paare ${}^{(1,2)}\xi_\lambda \neq \xi_\lambda \in \operatorname{Irr}(A_n)$ wie es Paare ${}^{(1,2)}K \neq K \in \operatorname{Cl}(A_n)$ gibt. Dies sieht man auch durch folgende Bijektion:

$$\Phi : \{\text{Partitionen } \lambda = \lambda'\} \longrightarrow \{\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \text{ mit } \lambda_i \text{ ungerade und paarweise verschieden}\},$$
$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \longmapsto (2\lambda_1 - 1, 2\lambda_2 - 3, 2\lambda_3 - 5, \ldots)$$



Satz 11.20. *Sei $\lambda = \lambda'$ eine Partition von n. Dann existiert genau eine Partition $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_k)$ von n mit $\chi_\lambda(g) \equiv 1 \pmod 2$ für ein $g \in S_n$ vom Zyklentyp μ. Es gilt*

$$\xi_\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}\chi_\lambda(h) & h \text{ hat nicht Zyklentyp } \mu,\\ \frac{1}{2}\chi_\lambda(h) + \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-k}{2}}\mu_1\ldots\mu_k} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } g \text{ konjugiert},\\ \frac{1}{2}\chi_\lambda(h) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-k}{2}}\mu_1\ldots\mu_k} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } {}^{(1,2)}g \text{ konjugiert} \end{cases}$$

bei geeigneter Wahl von ξ_λ. Die Abbildung $\Gamma : \lambda \to \mu$ ist eine Bijektion zwischen den Partitionen $\lambda = \lambda'$ und den Partitionen μ mit paarweise verschiedenen ungeraden Teilen.

Beweis. Wir argumentieren durch Induktion nach (n,λ), wobei λ lexikografisch geordnet ist. O. B. d. A. sei $n \geq 4$.

Fall 1: $\lambda < (\frac{n-1}{2}, 1, \ldots, 1)$.
Sei $\Phi(\lambda) = \eta = (\eta_1,\ldots,\eta_l)$. Dann ist $\eta_1 < n$ und nach Induktion kennt man die Charaktere $\xi_1 := \xi_{\Gamma^{-1}(\eta_1)} \in \operatorname{Irr}(A_{\eta_1})$ und $\xi_2 := \xi_{\Gamma^{-1}(\eta_2,\ldots,\eta_l)} \in \operatorname{Irr}(A_{n-\eta_1})$. Somit ist $\xi_1\xi_2 \in \operatorname{Irr}(A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1})$. Mittels $A_{n-\eta_1} \cong \operatorname{Alt}(\{\eta_1+1, \eta_1+2, \ldots, n\})$ können wir $A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}$ als Untergruppe von A_n auffassen. Wir setzen

$$\theta := \left(\xi_1\xi_2 - {}^{(1,2)}\xi_1\xi_2\right)^{A_n}.$$

Sei $\theta(h) \neq 0$ für ein $h \in A_n$.

Behauptung: h hat Zyklentyp η.
Beweis: Es existiert ein $x \in A_n$ mit $xhx^{-1} \in A_{\eta_1} \times A_{n-\eta_1}$. Wir schreiben $xhx^{-1} = (xhx^{-1})_1(xhx^{-1})_2$

mit $(xhx^{-1})_1 \in A_{\eta_1}$ und $(xhx^{-1})_2 \in A_{n-\eta_1}$. Ist $(xhx^{-1})_1$ kein η_1-Zyklus, so wäre nach Induktionsvoraussetzung $\xi_1((xhx^{-1})_1) = {}^{(1,2)}\xi_1((xhx^{-1})_1)$ und $\theta(h) = 0$. Wir können also annehmen, dass h_1 ein η_1-Zyklus ist. Wegen $\eta_1 > \eta_i$ für $i \geq 2$ ist $x \in S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1}$. Nehmen wir als Nächstes an, dass h_2 nicht Zyklentyp $(\eta_2, \ldots, \eta_l)$ hat. Im Fall $\eta_2 = 1$ wäre $l = 2$ und $h_2 = 1$, da die η_i paarweise verschieden sind. Dieser Widerspruch zeigt $\eta_2 \neq 1$ und $n - \eta_1 \geq 2$. Nun hat auch $(xhx^{-1})_2$ nicht Zyklentyp $(\eta_2, \ldots, \eta_l)$ und es folgt $\xi_2((xhx^{-1})_2) = \xi_2(h)$ für alle $x \in S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1}$. Sei $\zeta := (\eta_1 + 1, \eta_1 + 2)$. Mit x durchläuft auch $(1,2)\zeta x$ die Menge $A_n \cap (S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1})$. Dabei gilt

$$\xi_1\big(((1,2)\zeta xhx^{-1}\zeta(1,2))_1\big) - \xi_1((\zeta xhx^{-1}\zeta)_1) = {}^{(1,2)}\xi_1((xhx^{-1})_1) - \xi_1((xhx^{-1})_1).$$

Dies ergibt den Widerspruch

$$\theta(h) = \frac{\xi_2(h_2)}{|A_{\eta_1}||A_{n-\eta_1}|} \sum_{x \in A_n \cap (S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1})} \big(\xi_1((xhx^{-1})_1) - {}^{(1,2)}\xi_1((xhx^{-1})_1)\big) = 0.$$

Behauptung: $\theta = \widetilde{\xi}_\lambda - {}^{(1,2)}\widetilde{\xi}_\lambda$ mit $\widetilde{\xi}_\lambda \in \operatorname{Irr}(A_n)$.
Beweis: Im Fall $\eta_2 = 1$ ist

$$\theta(h) = \frac{1}{|A_{\eta_1}|} \sum_{x \in A_{\eta_1}} \xi_1(xhx^{-1}) - {}^{(1,2)}\xi_1(xhx^{-1}) = \pm\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Das Vorzeichen hängt hierbei von der Wahl des Charakters ξ_1 ab und wird im Folgenden unerheblich sein. Sei nun $\eta_2 > 1$ und $\chi_2 := \chi_{\Gamma^{-1}(\eta_2,\ldots,\eta_l)} \in \operatorname{Irr}(S_{n-\eta_1})$. Die Summanden in $\theta(h)$ treten in Paaren der Form

$$\pm\sqrt{(-1)^{\frac{\eta_1-1}{2}}\eta_1}\left(\frac{1}{2}\chi_2(h_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-\eta_1-(l-1)}{2}}\eta_2\ldots\eta_l}\right)$$

auf (ersetze x durch $(1,2)\zeta x$ wie oben). Wegen $|A_n \cap (S_{\eta_1} \times S_{n-\eta_1})| = 2|A_{\eta_1}||A_{n-\eta_1}|$ folgt

$$\theta(h) = \pm 2\frac{\sqrt{(-1)^{\frac{\eta_1-1}{2}+\frac{n-\eta_1-l+1}{2}}\eta_1\ldots\eta_l}}{2} = \pm\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1\ldots\eta_l}.$$

Dies zeigt

$$(\theta,\theta)_{A_n} = \frac{2|A_n : \mathrm{C}_{A_n}(h)|}{|A_n|}\eta_1\ldots\eta_l = 2.$$

Wegen ${}^{(1,2)}\theta = -\theta$ existiert ein $\widetilde{\xi}_\lambda \in \operatorname{Irr}(A_n)$ mit $\theta = \widetilde{\xi}_\lambda - {}^{(1,2)}\widetilde{\xi}_\lambda$.

Behauptung: Die Aussage gilt.
Beweis: Sei $\widetilde{\chi}_\lambda := \widetilde{\xi}_\lambda^{S_n} \in \operatorname{Irr}(S_n)$ (siehe Satz 4.13). Sei $\widetilde{h} \in A_n$ vom Zyklentyp η. Anhand der oben berechneten Werte für θ folgt

$$\widetilde{\xi}_\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h) & h \text{ hat nicht Zyklentyp } \eta, \\ \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1\ldots\eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } \widetilde{h} \text{ konjugiert}, \\ \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1\ldots\eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } {}^{(1,2)}\widetilde{h} \text{ konjugiert} \end{cases}$$

bei geeigneter Wahl von $\widetilde{\xi}_\lambda$. Nach Definition verschwindet $\widetilde{\chi}_\lambda$ auf $S_n \setminus A_n$. Ist $\widetilde{\chi}_\lambda(h) \equiv 1 \pmod 2$, so ist $h \in A_n$, und $\frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h)$ ist keine ganz-algebraische Zahl. Also muss dann h Zyklentyp η haben. Nehmen wir indirekt $\widetilde{\chi}_\lambda(\widetilde{h}) \equiv 0 \pmod 2$ an. Mit $\widetilde{\xi}_\lambda(\widetilde{h})$ ist dann auch $\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1\dots\eta_l}$ ganz-algebraisch. Somit wäre auch

$$\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1\dots\eta_l}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1\dots\eta_l} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1\dots\eta_l \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$$

ganz-algebraisch. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\widetilde{\chi}_\lambda$ für genau eine Konjugationsklasse von S_n ungerade Werte annimmt. Für verschiedene $\lambda < (\frac{n-1}{2}, 1, \dots, 1)$ erhält man offenbar auch verschiedene $\widetilde{\chi}_\lambda$. Somit gilt die Behauptung des Satzes für alle Charaktere von S_n bis auf (möglicherweise) einen.

Fall 2: $\lambda = (\frac{n-1}{2}, 1, \dots, 1)$.
Wegen $\Phi(\lambda) = (n)$ ist n ungerade. Wir bezeichnen den „fehlenden" Charakter mit $\widetilde{\chi}_\lambda \in \mathrm{Irr}(S_n)$. Wie üblich zerfällt $(\widetilde{\chi}_\lambda)_{A_n} = \widetilde{\xi}_\lambda + {}^{(1,2)}\widetilde{\xi}_\lambda$ mit $\widetilde{\xi}_\lambda \in \mathrm{Irr}(A_n)$. Sei $h \in K \in \mathrm{Cl}(A_n)$ vom Zyklentyp $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$. Ist $K \in \mathrm{Cl}(S_n)$, so ist $\widetilde{\xi}_\lambda(h) = \widetilde{\xi}_\lambda({}^{(1,2)}h) = {}^{(1,2)}\widetilde{\xi}_\lambda(h) = \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h)$. Wir können nach Satz 11.16 also annehmen, dass die η_i paarweise verschieden und ungerade sind.

Fall 2.1: $\eta \neq (n)$.
Sei $\tau := \Phi^{-1}(\eta) \neq \lambda$. Nach Fall 1 gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}_\tau(h)\overline{\widetilde{\xi}_\tau({}^{(1,2)}h)} + \widetilde{\xi}_\tau({}^{(1,2)}h)\overline{\widetilde{\xi}_\tau(h)} &= \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\tau(h)^2 - \frac{1}{2}\eta_1\dots\eta_l,\\
\widetilde{\xi}_\tau(h)\overline{\widetilde{\xi}_\tau(h)} + \widetilde{\xi}_\tau({}^{(1,2)}h)\overline{\widetilde{\xi}_\tau({}^{(1,2)}h)} &= \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\tau(h)^2 + \frac{1}{2}\eta_1\dots\eta_l.
\end{aligned}$$

Sei $a := \widetilde{\xi}_\lambda(h)$ und $b := \widetilde{\xi}_\lambda({}^{(1,2)}h)$. Dann ist $a + b = \widetilde{\chi}_\lambda(h)$. Nach der zweiten Orthogonalitätsrelation ist

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\xi\in\mathrm{Irr}(A_n)}\xi(h)\overline{\xi({}^{(1,2)}h)} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}(S_n),\\ \chi_{A_n}\in\mathrm{Irr}(A_n)}}\chi(h)^2 + \Big(\sum_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}(S_n),\\ \chi_{A_n}\notin\mathrm{Irr}(A_n)}}\frac{\chi(h)^2}{2}\Big) - \frac{\eta_1\dots\eta_l}{2} + a\overline{b} + b\overline{a} - \frac{\widetilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2}\\
&= \frac{1}{2}|\mathrm{C}_{S_n}(h)| - \frac{1}{2}\eta_1\dots\eta_l + a\overline{b} + b\overline{a} - \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h)^2 = a\overline{b} + b\overline{a} - \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h)^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|\mathrm{C}_{A_n}(h)| &= \sum_{\xi\in\mathrm{Irr}(A_n)}\xi(h)\overline{\xi(h)} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}(S_n),\\ \chi_{A_n}\in\mathrm{Irr}(A_n)}}\chi(h)^2 + \Big(\sum_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}(S_n),\\ \chi_{A_n}\notin\mathrm{Irr}(A_n)}}\frac{\chi(h)^2}{2}\Big) + \frac{\eta_1\dots\eta_l}{2} + a\overline{a} + b\overline{b} - \frac{\widetilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2}\\
&= \frac{1}{2}|\mathrm{C}_{S_n}(h)| + \frac{1}{2}\eta_1\dots\eta_l + a\overline{a} + b\overline{b} - \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h)^2 = |\mathrm{C}_{A_n}(h)| + a\overline{a} + b\overline{b} - \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h)^2.
\end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt $a\overline{b} + b\overline{a} = a\overline{a} + b\overline{b}$ und $(a - b)(\overline{b} - \overline{a}) = 0$. Dies zeigt $a = b = \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h)$.

Fall 2.2: $\eta = \Phi(\lambda)$.
Dann ist $\widetilde{\xi}_\tau(h) = \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\tau(h)$ für alle $\tau \neq \lambda$ nach Fall 1. Die zweite Orthogonalitätsrelation liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\xi\in\mathrm{Irr}(A_n)}\xi(h)\overline{\xi({}^{(1,2)}h)} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}(S_n),\\ \chi_{A_n}\in\mathrm{Irr}(A_n)}}\chi(h)^2 + \Big(\sum_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}(S_n),\\ \chi_{A_n}\notin\mathrm{Irr}(A_n)}}\frac{\chi(h)^2}{2}\Big) + a\overline{b} + b\overline{a} - \frac{\widetilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2}\\
&= \frac{1}{2}\eta_1\dots\eta_l + a\overline{b} + b\overline{a} - \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h)^2
\end{aligned}$$

und

$$|\mathrm{C}_{A_n}(h)| = \sum_{\xi\in\mathrm{Irr}(A_n)} \xi(h)\overline{\xi(h)} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}(S_n),\\ \chi_{A_n}\in\mathrm{Irr}(A_n)}} \chi(h)^2 + \Big(\sum_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}(S_n),\\ \chi_{A_n}\notin\mathrm{Irr}(A_n)}} \frac{\chi(h)^2}{2}\Big) + a\overline{a} + b\overline{b} - \frac{\widetilde{\chi}_\lambda(h)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\eta_1\ldots\eta_l + a\overline{a} + b\overline{b} - \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h)^2.$$

Also ist $\eta_1\ldots\eta_l = a(\overline{a}-\overline{b})+b(\overline{b}-\overline{a}) = (a-b)(\overline{a}-\overline{b})$. Sei $h := (a_1^1,\ldots,a_{\eta_1}^1)(a_1^2,\ldots,a_{\eta_2}^2)\ldots(a_1^l,\ldots,a_{\eta_l}^l)$ und

$$x = \prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{\frac{\eta_i-1}{2}} (a_{j+1}^i, a_{\eta_i-j+1}^i).$$

Dann ist $xhx^{-1} = h^{-1}$. Im Fall $n-l \equiv 0 \pmod 4$ ist $\mathrm{sgn}(x) = (-1)^{\frac{\eta_1-1}{2}+\ldots+\frac{\eta_l-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-l}{2}} = 1$. Dann sind also h und h^{-1} in A_n konjugiert und $a,b\in\mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 6.15). Es ergibt sich $a-b = \pm\sqrt{\eta_1\ldots\eta_l}$ und $a = \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2}\sqrt{\eta_1\ldots\eta_l}$. Sei schließlich $n-l\equiv 2 \pmod 4$. Hier ist $\mathrm{sgn}(x) = -1$. Gäbe es ein $y\in A_n$ mit $yhy^{-1} = h^{-1}$, so wäre $x\in x\,\mathrm{C}_{S_n}(h) = y\,\mathrm{C}_{S_n}(h)\subseteq A_n$ (siehe Beweis von Satz 11.16). Also sind h und h^{-1} nicht in A_n konjugiert und $b = \overline{a}$. Somit ist $a-\overline{a} = \sqrt{-\eta_1\ldots\eta_l}$ und $a = \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2}\sqrt{-\eta_1\ldots\eta_l}$ bei geeigneter Wahl von $\widetilde{\xi}_\lambda$. Für ein festes $\widetilde{h}\in A_n$ vom Zyklentyp η gilt also

$$\widetilde{\xi}_\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h) & h \text{ hat nicht Zyklentyp } \eta,\\ \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h) + \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1\ldots\eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } \widetilde{h} \text{ konjugiert},\\ \frac{1}{2}\widetilde{\chi}_\lambda(h) - \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{\frac{n-l}{2}}\eta_1\ldots\eta_l} & h \text{ ist in } A_n \text{ zu } {}^{(1,2)}\widetilde{h} \text{ konjugiert.} \end{cases}$$

Zusammen mit Fall 1 folgt auch, dass Γ eine Bijektion ist. □

Beispiel 11.21. Für $n=5$ erhält man aus Beispiel 11.14 die Charaktertafel von A_5 (vgl. Aufgabe 8):

A_5	(1^5)	$(2^2,1)$	$(3,1^2)$	$(5)_1$	$(5)_2$
(5)	1	1	1	1	1
$(4,1)$	4	.	1	-1	-1
$(3,2)$	5	1	-1	.	.
$(3,1^2)_1$	3	-1	.	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$(3,1^2)_2$	3	-1	.	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bemerkung 11.22. Sei $\lambda = \lambda'$ mit Young-Diagramm Y und $\Phi(\lambda) = \mu = (\mu_1,\ldots,\mu_k)$. Sei $x\in S_n$ vom Zyklentyp μ und sei $y\in S_{n-\mu_1}$ vom Zyklentyp $(\mu_2,\ldots,\mu_k)$. Wir zeigen $\chi_\lambda(x) = (-1)^{\frac{n-k}{2}}$ durch Induktion nach k. Nach der Murnaghan-Nakayama-Formel gilt

$$\chi_\lambda(x) = \sum_{\substack{b \text{ Box von } Y,\\ h(b)=\mu_1}} (-1)^{l(b)}\chi_{\lambda\setminus H(b)}(y) = (-1)^{l(1,1)}\chi_{\lambda\setminus H(1,1)}(y) = (-1)^{\frac{\mu_1-1}{2}}\chi_{\lambda\setminus H(1,1)}(y).$$

Im Fall $k=1$ ist $\chi_{\lambda\setminus H(1,1)}(y) = 1 = \mu_1$ und $\chi_\lambda(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Sei nun $k\geq 2$ und die Aussage für $k-1$ bereits bewiesen. Dann gilt

$$\chi_\lambda(x) = (-1)^{\frac{\mu_1-1}{2}}\chi_{\lambda\setminus H(1,1)}(y) = (-1)^{\frac{\mu_1-1}{2}+\frac{n-\mu_1-k+1}{2}} = (-1)^{\frac{n-k}{2}}.$$

Insbesondere ist $\chi_\lambda(x)$ ungerade und in Satz 11.20 gilt $\Gamma = \Phi$. Die im Beweis konstruierten Charaktere $\widetilde{\chi}_\lambda$ stimmen also mit χ_λ überein. Außerdem kennt man somit die einzigen nicht-ganzzahligen Werte in der Charaktertafel von A_n explizit.

12 Aufgaben

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Bestimmen Sie die irreduziblen Darstellungen einer endlichen zyklischen Gruppe.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)**.** Sei G eine endliche Gruppe und V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $\{v_g : g \in G\}$. Für $g \in G$ sei $\Delta(g)$ die lineare Abbildung auf V, die v_h auf v_{gh} abbildet für $h \in G$.

(i) Zeigen Sie, dass $\Delta : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine treue Darstellung von G ist.

(ii) Berechnen Sie den Charakter von Δ.

(iii) Zeigen Sie, dass Δ für $G \neq 1$ nicht irreduzibel ist.

(Man nennt Δ die *reguläre* Darstellung von G.)

Aufgabe 3 (2+2+2+2+2+2 Punkte)**.** Sei $n \geq 3$ und

$$\sigma := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \tau := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\zeta := e^{2\pi i/n}$. Man nennt $D_{2n} := \langle \sigma, \tau \rangle$ *Diedergruppe*.

(i) Zeigen Sie: $|D_{2n}| = 2n$.

(ii) Zeigen Sie, dass ein irreduzibler Charakter χ von D_{2n} mit $\chi(\sigma) = 1$ und $\chi(\tau) = -1$ existiert.

(iii) Zeigen Sie, dass für gerades n irreduzible Charaktere χ und ψ von D_{2n} mit $\chi(\sigma) = \psi(\sigma) = -1$ und $\chi(\tau) = -\psi(\tau) = 1$ existieren.

(iv) Zeigen Sie, dass D_{2n} eine Darstellung Δ_r mit $\Delta_r(\sigma) = \sigma^r$ und $\Delta_r(\tau) = \tau$ für $r \in \mathbb{Z}$ besitzt.

(v) Zeigen Sie, dass Δ_r für $r = 1, \ldots, (n-1)/2$ (bzw. $r = 1, \ldots, (n-2)/2$) irreduzibel ist, falls n ungerade (bzw. gerade) ist.

(vi) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem für die Ähnlichkeitsklassen irreduzibler Darstellungen von D_{2n}.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Sei Δ eine Matrixdarstellung einer endlichen Gruppe G, und sei $g \in G$. Zeigen Sie, dass $\Delta(g)$ diagonalisierbar ist.
Hinweis: Man kann die Jordansche Normalform oder Satz 1.10 der Vorlesung benutzen.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)**.** Sei Δ eine Matrixdarstellung von G mit Charakter χ.

(i) Zeigen Sie, dass auch $\overline{\Delta}$ mit $\overline{\Delta}(g) := \overline{\Delta(g)}$ für $g \in G$ eine Matrixdarstellung von G ist. Dabei ist $\overline{\Delta(g)}$ das komplex Konjugierte von $\Delta(g)$.

(ii) Δ ist genau dann irreduzibel, wenn $\overline{\Delta}$ irreduzibel ist.

(iii) $\overline{\Delta}$ hat Charakter $\overline{\chi}$ mit $\overline{\chi}(g) := \overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ für $g \in G$.
Hinweis: Man kann Aufgabe 4 verwenden.

Aufgabe 6 (2 Punkte)**.** Seien $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\chi(1) = 1$. Zeigen Sie: $\chi\psi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Aufgabe 7 (2+2+2+2 Punkte)**.** Seien G, H endliche, abelsche Gruppen. Zeigen Sie:

(i) $\widehat{G} := \mathrm{Irr}(G)$ ist eine abelsche Gruppe bzgl. Multiplikation. (Man nennt $\widehat{G}$ *Charaktergruppe* von G.)

(ii) $\widehat{\widehat{G}} \cong G$
Hinweis: Denken Sie an den Bidualraum. Verwenden Sie nicht (iv).

(iii) $\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$.

(iv) $\widehat{G} \cong G$.

Aufgabe 8 (2 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Charaktertafel von A_5.

Aufgabe 9 (2+2+2 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(i) Für Charaktere χ, ψ von G gilt: $\mathrm{Ker}(\chi + \psi) = \mathrm{Ker}(\chi) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$.

(ii) Jeder Normalteiler von G ist der Kern eines Charakters.

(iii) $\bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{Ker}(\chi) = 1$.

Aufgabe 10 (2 Punkte)**.** Finden Sie ein normiertes, ganzzahliges Polynom mit Nullstelle $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Aufgabe 11 (2 Punkte)**.** Sei $N \trianglelefteq G$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Zeigen Sie, dass $(\chi_N)^G = \chi\rho$ gilt, wobei ρ die Inflation des regulären Charakters von G/N ist.

Aufgabe 12 (3 Punkte)**.** Sei A eine abelsche Untergruppe von G, und sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Zeigen Sie: $\chi(1) \le |G : A|$.

Aufgabe 13 (3 Punkte)**.** Berechnen Sie die Eigenwerte einer Permutationsmatrix. (Eine Permutationsmatrix enthält in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 und sonst nur Nullen.)

Aufgabe 14 (3 Punkte)**.** Sei $H \le G$ und Δ eine Darstellung von H mit Charakter χ. Sei $t_1, \ldots, t_m$ ein Repräsentantensystem für die Linksnebenklassen von H nach G. Für $g \in G$ sei $\dot{\Delta}(g) := \Delta(g)$, falls $g \in H$ und $0 \in \mathbb{Z}^{\chi(1) \times \chi(1)}$ sonst. Für $g \in G$ definieren wir die Blockmatrix

$$\Delta^G(g) := \begin{pmatrix} \dot{\Delta}(t_1^{-1} g t_1) & \cdots & \dot{\Delta}(t_1^{-1} g t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\Delta}(t_m^{-1} g t_1) & \ldots & \dot{\Delta}(t_m^{-1} g t_m) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass Δ^G eine Darstellung von G mit Charakter χ^G ist.

Aufgabe 15 (3 Punkte)**.** Sei K ein endlicher Körper mit $|K| > 2$. Für $a \in K^\times$ und $b \in K$ sei $f_{a,b} : K \to K$, $x \mapsto ax + b$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Aff}(1, K) := \{f_{a,b} : a \in K^\times, b \in K\} \le \mathrm{Sym}(K)$$

eine Frobeniusgruppe ist.

Aufgabe 16 (2 Punkte)**.** Sei G eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskomplement H. Zeigen Sie: $\mathrm{ggT}(|H|, |G:H|) = 1$ (d. h. H ist eine *Hallgruppe* von G).

Aufgabe 17 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass Untergruppen und Faktorgruppen von p-elementaren (bzw. p-quasielementaren) Gruppen wieder p-elementar (bzw. p-quasielementar) sind.

Aufgabe 18 (2 Punkte)**.** Sei P eine endliche p-Gruppe. Zeigen Sie, dass P genau dann einen treuen, irreduziblen Charakter besitzt, wenn $\mathrm{Z}(P)$ zyklisch ist.

Aufgabe 19 (3 Punkte)**.** Sei $G = \langle g \rangle \cong C_3$ und $\Delta : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ mit $\Delta(g) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass Δ eine irreduzible $\mathbb{Q}$-Darstellung ist. Zeigen Sie auch, dass Δ aufgefasst als ($\mathbb{C}$-)Darstellung reduzibel ist.

Aufgabe 20 (2+2+2 Punkte)**.** Sei $G := \mathrm{SL}(2, 3)$. Zeigen Sie:

(i) $|G| = 24$.

(ii) $G/\,\mathrm{Z}(G) \cong A_4$.
Hinweis: Betrachten Sie die Operation von G auf der Menge der eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_3^2$.

(iii) G ist keine M-Gruppe. (Nicht jede auflösbare Gruppe ist also eine M-Gruppe.)

Aufgabe 21 (3 Punkte)**.** Sei G eine Gruppe ungerader Ordnung. Zeigen Sie: $k(G) \equiv |G| \pmod{16}$.
Hinweis: Betrachten Sie $\overline{\chi} = \chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Aufgabe 22 (3 Punkte)**.** Konstruieren Sie irreduzible Charaktere mit Frobenius-Schur-Indikator 0, 1 und -1.

Aufgabe 23 (10 Punkte)**.** Entscheiden Sie, welche der folgenden Gruppeneigenschaften man an Hand der Charaktertafel von G ablesen kann:

(i) $|G|$,

(ii) Kommutativität,

(iii) die Längen der Konjugationsklassen,

(iv) Einfachheit,

(v) Normalteiler und deren Ordnung,

(vi) Isomorphietyp von G/G',

(vii) Isomorphietyp von $\mathrm{Z}(G)$,

(viii) Auflösbarkeit,

(ix) Isomorphietyp (von G),

(x) Auflösbarkeitsstufe, d. h. $\min\{n \in \mathbb{N} : G^{(n)} = 1\}$.
Hinweis: Verwenden Sie Google.[3]

Zusatz: Nilpotenz, Nilpotenzklasse, $\mathrm{F}(G)$ (Fittinggruppe), $\Phi(G)$ (Frattinigruppe), ... (soweit Begriffe bekannt).

Aufgabe 24 (5 Punkte)**.** Gegeben sei die Charaktertafel von G:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1
1	-1	1	1	$\overline{\beta}$	$-\overline{\beta}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\beta}$	β	$-\beta$	β	β	1	-1	1	1
1	-1	1	1	β	$-\beta$	β	β	$\overline{\beta}$	$-\overline{\beta}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\beta}$	1	-1	1	1
1	1	1	1	$\overline{\beta}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\beta}$	β	β	β	β	1	1	1	1
1	1	1	1	β	β	β	β	$\overline{\beta}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\beta}$	1	1	1	1
2	.	α	α'	2	.	α	α'	2	.	α	α'	2	.	α	α'
2	.	α'	α	2	.	α'	α	2	.	α'	α	2	.	α'	α
2	.	α	α'	$2\overline{\beta}$	.	γ'	γ	2β	.	$\overline{\gamma'}$	$\overline{\gamma}$	2	.	α	α'
2	.	α	α'	2β	.	$\overline{\gamma'}$	$\overline{\gamma}$	$2\overline{\beta}$	.	γ'	γ	2	.	α	α'
2	.	α'	α	$2\overline{\beta}$	.	γ	γ'	2β	.	$\overline{\gamma}$	$\overline{\gamma'}$	2	.	α'	α
2	.	α'	α	2β	.	$\overline{\gamma}$	$\overline{\gamma'}$	$2\overline{\beta}$	.	γ	γ'	2	.	α'	α
3	-3	3	3	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	1	-1	-1
3	3	3	3	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	-1	-1	-1
6	.	3α	$3\alpha'$	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	.	$-\alpha$	$-\alpha'$
6	.	$3\alpha'$	3α	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	.	$-\alpha'$	$-\alpha$

mit

$$. = 0, \qquad \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \alpha' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

$$\beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad \gamma = e^{2\pi i/15} + e^{8\pi i/15}, \qquad \gamma' = e^{14\pi i/15} + e^{-4\pi i/15}.$$

Bestimmen Sie so viele Eigenschaften von G wie möglich.

Aufgabe 25 (2 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass eine einfache Gruppe keinen irreduziblen Charakter vom Grad 2 besitzt.

Aufgabe 26 (2 Punkte)**.** Sei G eine einfache Gruppe mit einer Involution x, sodass $\mathrm{C}_G(x)$ zyklisch ist. Bestimmen Sie G.

Aufgabe 27 (2+2 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Zwei Elemente in S_n sind genau dann konjugiert, wenn sie den gleichen Zyklentyp haben.

(ii) Die Charaktertafel von S_n ist ganzzahlig.
Hinweis: Verwenden Sie Galoistheorie.

Aufgabe 28 (2 Punkte)**.** Sei $G = G' \leq \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ und $A \neq 1$ ein abelscher Normalteiler von G. Zeigen Sie $A = \mathrm{Z}(G) \cong C_2$.

[3] Für das Schreiben von Abschlussarbeiten muss auch Recherchieren geübt werden :-)

Aufgabe 29 (2+2+2+2+2+2+2 Punkte)**.** Sei $f : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine Gruppenoperation auf einer endlichen, nichtleeren Menge Ω. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\mathrm{Sym}(\Omega) \cong S_{|\Omega|}$. Im Folgenden können wir also $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ annehmen.

(ii) Die Abbildung $F : \mathrm{Sym}(\Omega) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\pi \mapsto (\delta_{i\pi(j)})_{i,j=1}^{n}$ ist ein Monomorphismus. Insbesondere ist $\Delta := F \circ f : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Darstellung von G. (Man nennt Δ *Permutationsdarstellung.*)

(iii) Für den Charakter χ von Δ gilt $\chi(g) := |\{\omega \in \Omega : {}^g\omega = \omega\}|$ für $g \in G$. (Man nennt χ *Permutationscharakter.*)

(iv) Sei $\omega_1, \ldots, \omega_m$ ein Repräsentantensystem für die Bahnen von f. Dann ist

$$\chi = \sum_{i=1}^{m} 1_{G_{\omega_i}}^{G},$$

wobei $G_\omega := \{g \in G : {}^g\omega = \omega\}$ der *Stabilisator* von $\omega \in \Omega$ in G ist.

(v) Es gilt $m = (1_G, \chi)_G$. Insbesondere ist $\chi - 1_G$ ein Charakter von G, falls $|\Omega| > 1$.

(vi) Sind $H_1, \ldots, H_k$ beliebige Untergruppen von G, so ist auch

$$\sum_{i=1}^{k} 1_{H_i}^{G}$$

ein Permutationscharakter von G.

(vii) Die Menge der Permutationscharaktere von G ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation.

Aufgabe 30 (2 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Untergruppe besitzt, die zu S_{n+1} isomorph ist.
Hinweis: Man kann Aufgabe 29 verwenden.

Anhang: Charaktertafeln

Die Charaktertafeln von S_3, S_4, S_5 und A_3, A_4, A_5 wurden bereits berechnet.

S_6	(1^6)	$(2,1^4)$	$(2^2,1^2)$	(2^3)	$(3,1^3)$	$(3,2,1)$	(3^2)	$(4,1^2)$	$(4,2)$	$(5,1)$	(6)
(6)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(5,1)$	5	3	1	−1	2	.	−1	1	−1	.	−1
$(4,2)$	9	3	1	3	.	.	.	−1	1	−1	.
$(4,1^2)$	10	2	−2	−2	1	−1	1	.	.	.	1
(3^2)	5	1	1	−3	−1	1	2	−1	−1	.	.
$(3,2,1)$	16	.	.	.	−2	.	−2	.	.	1	.
$(3,1^3)$	10	−2	−2	2	1	1	1	.	.	.	−1
(2^3)	5	−1	1	3	−1	−1	2	1	−1	.	.
$(2^2,1^2)$	9	−3	1	−3	.	.	.	1	1	−1	.
$(2,1^4)$	5	−3	1	1	2	.	−1	−1	−1	.	1
(1^6)	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	1	−1

A_6	(1^6)	$(2^2,1^2)$	$(3,1^3)$	(3^2)	$(4,2)$	$(5,1)_1$	$(5,1)_2$
(6)	1	1	1	1	1	1	1
$(5,1)$	5	1	2	−1	−1	.	.
$(4,2)$	9	1	.	.	1	−1	−1
$(4,1^2)$	10	−2	1	1	.	.	.
(3^2)	5	1	−1	2	−1	.	.
$(3,2,1)_2$	8	.	−1	−1	.	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$(3,2,1)_1$	8	.	−1	−1	.	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

S_7	(1^7)	$(2,1^5)$	$(2^2,1^3)$	$(2^3,1)$	$(3,1^4)$	$(3,2,1^2)$	$(3,2^2)$	$(3^2,1)$	$(4,1^3)$	$(4,2,1)$	$(4,3)$	$(5,1^2)$	$(5,2)$	$(6,1)$	(7)
(7)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(6,1)$	6	4	2	.	3	1	−1	.	2	.	−1	1	−1	.	−1
$(5,2)$	14	6	2	2	2	.	2	−1	.	.	.	−1	1	−1	.
$(5,1^2)$	15	5	−1	−3	3	−1	−1	.	1	−1	1	.	.	.	1
$(4,3)$	14	4	2	.	−1	1	−1	2	−2	.	1	−1	−1	.	.
$(4,2,1)$	35	5	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	1	−1	.	.	1	.
$(4,1^3)$	20	.	−4	.	2	.	2	2	.	.	.	.	.	.	−1
$(3^2,1)$	21	1	1	−3	−3	1	1	.	−1	−1	−1	1	1	.	.
$(3,2^2)$	21	−1	1	3	−3	−1	1	.	1	−1	1	1	−1	.	.
$(3,2,1^2)$	35	−5	−1	−1	−1	1	−1	−1	1	1	1	.	.	−1	.
$(3,1^4)$	15	−5	−1	3	3	1	−1	.	−1	−1	−1	.	.	.	1
$(2^3,1)$	14	−4	2	.	−1	−1	−1	2	2	.	−1	−1	1	.	.
$(2^2,1^3)$	14	−6	2	−2	2	.	2	−1	.	.	.	−1	−1	1	.
$(2,1^5)$	6	−4	2	.	3	−1	−1	.	−2	.	1	1	1	.	−1
(1^7)	1	−1	1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1

A_7	(1^7)	$(2^2,1^3)$	$(3,1^4)$	$(3,2^2)$	$(3^2,1)$	$(4,2,1)$	$(5,1^2)$	$(7)_1$	$(7)_2$
(7)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(6,1)$	6	2	3	−1	.	.	1	−1	−1
$(5,2)$	14	2	2	2	−1	.	−1	.	.
$(5,1^2)$	15	−1	3	−1	.	−1	.	1	1
$(4,3)$	14	2	−1	−1	2	.	−1	.	.
$(4,2,1)$	35	−1	−1	−1	−1	1	.	.	.
$(4,1^3)_1$	10	−2	1	1	1	.	.	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$
$(4,1^3)_2$	10	−2	1	1	1	.	.	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$
$(3^2,1)$	21	1	−3	1	.	−1	1	.	.

A_8	(1^8)	$(2^2,1^4)$	(2^4)	$(3,1^5)$	$(3,2^2,1)$	$(3^2,1^2)$	$(4,2,1^2)$	(4^2)	$(5,1^3)$	$(6,2)$	$(5,3)_1$	$(5,3)_2$	$(7,1)_1$	$(7,1)_2$
(8)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(7,1)$	7	3	−1	4	.	1	1	−1	2	−1	−1	−1	.	.
$(6,2)$	20	4	4	5	1	−1	.	.	.	.	.	1	−1	−1
$(6,1^2)$	21	1	−3	6	−2	.	−1	1	1	1	1	.	.	.
$(5,3)$	28	4	−4	1	1	1	.	.	−2	1	1	−1	.	.
$(5,2,1)$	64	.	.	4	.	−2	.	.	−1	−1	−1	.	1	1
$(5,1^3)$	35	−5	3	5	1	2	−1	−1	.	.	.	.	.	.
(4^2)	14	2	6	−1	−1	2	.	2	−1	−1	−1	.	.	.
$(4,3,1)$	70	2	−2	−5	−1	1	.	−2	.	.	.	1	.	.
$(4,2^2)$	56	.	8	−4	.	−1	.	.	1	1	1	−1	.	.
$(4,2,1^2)_1$	45	−3	−3	.	.	.	1	1	.	.	.	.	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$
$(4,2,1^2)_2$	45	−3	−3	.	.	.	1	1	.	.	.	.	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$
$(3^2,2)_1$	21	1	−3	−3	1	.	−1	1	1	$\frac{-1+\sqrt{-15}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-15}}{2}$	.	.	.
$(3^2,2)_2$	21	1	−3	−3	1	.	−1	1	1	$\frac{-1-\sqrt{-15}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-15}}{2}$	.	.	.

Sei q eine Primzahlpotenz, $x,y \in \mathbb{F}_q^\times$ und $z \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$. Jedes Element in $\mathrm{GL}(2,q)$ ist zu einer der folgenden Matrizen konjugiert: $a_x := \mathrm{diag}(x,x)$, $b_x := \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$, $c_{x,y} := \mathrm{diag}(x,y)$ mit $x \neq y$ und d_z mit

Eigenwerten z, z^q. Dabei gilt $c_{x,y} \sim c_{y,x}$ und $d_z \sim d_{z^q}$. Insbesondere ist

$$2q-2+\frac{(q-1)(q-2)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}=q^2-1$$

die Anzahl der Konjugationsklassen von $\mathrm{GL}(2,q)$. Seien $\alpha,\beta \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q)$ und $\gamma \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_{q^2})$ mit $\alpha \neq \beta$ und $\gamma^q \neq \gamma$. Die Charaktertafel von $\mathrm{GL}(2,q)$ ist

	$\#$	$q-1$	$q-1$	$(q-1)(q-2)/2$	$q(q-1)/2$
	$\lvert {}^G g\rvert$	1	q^2-1	q^2+q	q^2-q
$\mathrm{GL}(2,q)$	$\#$	a_x	b_x	$c_{x,y}$	d_z
χ_α	$q-1$	$\alpha(x)^2$	$\alpha(x)^2$	$\alpha(x)\alpha(y)$	$\alpha(z^{q+1})$
ψ_α	$q-1$	$q\alpha(x)^2$	0	$\alpha(x)\alpha(y)$	$-\alpha(z^{q+1})$
$\rho_{\alpha,\beta}$	$(q-1)(q-2)/2$	$(q+1)\alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)\beta(y)+\alpha(y)\beta(x)$	0
τ_γ	$q(q-1)/2$	$(q-1)\gamma(x)$	$-\gamma(x)$	0	$-\gamma(z)-\gamma(z)^q$

Es gilt $\lvert\mathrm{SL}(2,q)\rvert=(q-1)q(q+1)$. Es existieren zyklische Untergruppen $X,Y \leq G$ der Ordnung $q-1$ bzw. $q+1$ mit $X \cap Y = Z = \langle -1_2\rangle = \mathrm{Z}(G)$. Sei $X_0 := X \setminus Z$ und $Y_0 := Y \setminus Z$. Die p-Sylowgruppen sind elementarabelsch der Ordnung q.

Sei zunächst $q=p^n$ ungerade. Bis auf Konjugation gibt es zwei Elemente a,b der Ordnung p. Seien $\alpha,\alpha_0 \in \mathrm{Irr}(X)\setminus\{1_X\}$ und $\beta,\beta_0 \in \mathrm{Irr}(Y)\setminus\{1_Y\}$ mit $\alpha^2 \neq \alpha_0^2 = 1 = \beta_0^2 \neq \beta^2$. Die Charaktertafeln sind:

- $q \equiv 1 \pmod 4$:

g	1	-1	$x \in X_0$	$y \in Y_0$	$\pm a$	$\pm b$
$\lvert\mathrm{C}_G(g)\rvert$	1	1	q^2+q	q^2-q	$\frac{q^2-1}{2}$	$\frac{q^2-1}{2}$
1_G	1	1	1	1	1	1
ρ	q	q	1	-1	0	0
η_1	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+1}{2}$	$\alpha_0(x)$	0	$\frac{1+\sqrt{q}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{q}}{2}$
η_1^*	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+1}{2}$	$\alpha_0(x)$	0	$\frac{1-\sqrt{q}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{q}}{2}$
η_2	$\frac{q-1}{2}$	$-\frac{q-1}{2}$	0	$-\beta_0(y)$	$\frac{\mp 1+\sqrt{q}}{2}$	$\frac{\mp 1-\sqrt{q}}{2}$
η_2^*	$\frac{q-1}{2}$	$-\frac{q-1}{2}$	0	$-\beta_0(y)$	$\frac{\mp 1-\sqrt{q}}{2}$	$\frac{\mp 1+\sqrt{q}}{2}$
χ_α	$q+1$	$\alpha(-1)(q+1)$	$\alpha(x)+\alpha(x)^{-1}$	0	$\alpha(\pm 1)$	$\alpha(\pm 1)$
ψ_β	$q-1$	$\beta(-1)(q-1)$	0	$-\beta(y)-\beta(y)^{-1}$	$-\beta(\pm 1)$	$-\beta(\pm 1)$

- $q \equiv -1 \pmod 4$:

g	1	-1	$x \in X_0$	$y \in Y_0$	$\pm a$	$\pm b$
$\lvert\mathrm{C}_G(g)\rvert$	1	1	q^2+q	q^2-q	$\frac{q^2-1}{2}$	$\frac{q^2-1}{2}$
1_G	1	1	1	1	1	1
ρ	q	q	1	-1	0	0
η_1	$\frac{q+1}{2}$	$-\frac{q+1}{2}$	$\alpha_0(x)$	0	$\frac{\mp 1+\sqrt{-q}}{2}$	$\frac{\mp 1-\sqrt{-q}}{2}$
$\overline{\eta_1}$	$\frac{q+1}{2}$	$-\frac{q+1}{2}$	$\alpha_0(x)$	0	$\frac{\mp 1-\sqrt{-q}}{2}$	$\frac{\mp 1+\sqrt{-q}}{2}$
η_2	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	0	$-\beta_0(y)$	$\frac{-1+\sqrt{-q}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-q}}{2}$
$\overline{\eta_2}$	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	0	$-\beta_0(y)$	$\frac{-1-\sqrt{-q}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-q}}{2}$
χ_α	$q+1$	$\alpha(-1)(q+1)$	$\alpha(x)+\alpha(x)^{-1}$	0	$\alpha(\pm 1)$	$\alpha(\pm 1)$
ψ_β	$q-1$	$\beta(-1)(q-1)$	0	$-\beta(y)-\beta(y)^{-1}$	$-\beta(\pm 1)$	$-\beta(\pm 1)$

- $p = 2$: Hier ist $Z = 1$ und es gibt es bis auf Konjugation nur ein Element a der Ordnung 2.

g	1	a	$x \in X_0$	$y \in Y_0$
$\lvert \mathrm{C}_G(g) \rvert$	1	q	$q-1$	$q+1$
1_G	1	1	1	1
ρ	q	0	1	-1
χ_α	$q+1$	1	$\alpha(x) + \alpha(x)^{-1}$	0
ψ_β	$q-1$	-1	0	$-\beta(y) - \beta(y)^{-1}$

Dabei gilt $\chi_\alpha = \chi_{\overline{\alpha}}$ und $\psi_\beta = \psi_{\overline{\beta}}$.

Stichwortverzeichnis